Calcul Intégral

I. Introduction au Calcul Intégral

Le calcul intégral consiste à déterminer l'aire sous une courbe, à partir d'une fonction continue sur un intervalle donné. L'intégrale définie d'une fonction ($f(x)$) sur l'intervalle ($[a,b]$) est notée :

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

II. Propriétés de l'Intégrale

1. Linéarité :

$$\int_a^b \big(kf(x)+g(x)\big)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

$où$ (k) Est une constante.

2. Additivité :

$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \quad \text{pour tout } c \in [a,b].$

3. Changement de limite :

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

III. Méthodes de Calcul d'Intégrales

1. Intégration Simple

Pour les fonctions simples, on applique directement les règles d'intégration.

Si $(u = g(x)), alors\ (du = g'(x)\ dx)$. L'intégrale se transforme en :

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\ dx = \int f(u)\ du$$

Exemples Corrigés

Exemple 1 :

I = \int_0^1 (3x^2 + 2) \, dx

Correction :

1. Calcul de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 (3x^2)\ dx + \int_0^1 2\ dx$$

2. Calcul des intégrales séparées :

- Pour ($\int_0^1 3x^2\ dx$):

$$\int 3x^2\ dx = x^3 \quad \Rightarrow \quad [x^3]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$$

$$-Pour(\int_0^1 2\ dx):$$

$$\int 2\ dx = 2x \quad \Rightarrow \quad [2x]_0^1 = 2(1) - 2(0) = 2$$

3. Résultat final :

$$I = 1 + 2 = 3$$

Exemple 2 : Utiliser la substitution

I = \int_0^1 (2x) \cdot (x^2 + 1) \, dx

Correction :

1. Substitution :

Soit ($u = x^2 + 1$), $alors$ ($du = 2x\,dx$).

2. Changement des limites :

- Quand ($x = 0$), ($u = 0^2 + 1 = 1$)

-Quand ($x = 1$), ($u = 1^2 + 1 = 2$)

3. Transformation de l'intégrale :

$$I = \int_1^2 u\,du$$

4. Calcul de l'intégrale :

$$\int u\ du = \frac{u^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Résultat final

$$I = \frac{3}{2}$$