Cours de Dérivation

1. Définition de la Dérivée

La dérivée d'une fonction $(f(x))$ en un point $(x = a)$ mesure la pente de la tangente à la courbe de (f) au point de coordonnées $((a, f(a)))$. Mathématiquement, la dérivée de $(f(x)) en (a)$, notée $(f'(a))$,est définie par :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2. Interprétation Géométrique

La dérivée $(f'(a))$ représente le taux de variation instantané de la fonction $(f(x))$ au point $(x = a). Si(f'(a) > 0)$, la fonction est croissante au point (a); si $(f'(a) < 0)$, elle est décroissante; et si $(f'(a) = 0)$, la tangente est horizontale, ce qui peut indiquer un maximum, un minimum, ou un point d'inflexion.

3. Règles de Dérivation

- **Dérivée d'une constante** : Si (c) est une constante, alors $((c)' = 0)$.

- **Dérivée de** $(x\hat{}n)$: $Si\ (f(x) = x\hat{}n)$ $(\text{où } (n)$ est un nombre réel), alors $(f'(x) = nx^{n-1})$.

- **Dérivée d'une somme** : $((f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x))$.

- **Dérivée d'un produit** : $((f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x))$.

- **Dérivée d'un quotient** : $(\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2})$.

- **Dérivée d'une composition** : Si $(y = f(u)) et (u = g(x)), alors (\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx})$.

La fonction f	D_f Domaine de définition de f	La fonction dérivée f '	$D_{f'}$ Domaine de définition de f '
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$;f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\};f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$D_f=[0,+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sin x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\tan x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=1+\tan^2 x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$x\in D_g\,/\,g(x)\geq 0$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_{g'}\,/\,g(x)>0$
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\ f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\};f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$

Exemple 1 :

Dérivée d'une fonction polynomiale

Trouver la dérivée de $(f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x - 7)$.

Solution :

Appliquons la règle de dérivation des puissances :

$$f'(x) = 3\cdot 4x^{4-1} - 5\cdot 3x^{3-1} + 2\cdot 1x^{1-1} - 0$$

$$f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 2$$

Exemple 2 :

Dérivée d'une fonction composée

Trouver la dérivée de $(f(x) = \sin(3x^2 + 2))$.

Solution :

Soit $(u(x) = 3x^2 + 2), alors\ (f(x) = \sin(u(x)))$.

- La dérivée de $(u(x))\ est\ (u'(x) = 6x)$.

- La dérivée de $(\sin\ (u))\ par\ rapport$ à $(u)\ est\ (\cos(u))$.

Par la règle de dérivation d'une fonction composée :

$$f'(x) = \cos(u(x)) \cdot u'(x) = \cos(3x^2 + 2) \cdot 6x$$

$$f'(x) = 6x\cos(3x^2 + 2)$$

Exemple 3 :

Dérivée d'un produit de fonctions

Trouver la dérivée de $(f(x) = (2x + 1)(x^2 - x))$.

Solution :

Utilisons la règle de dérivation d'un produit :

$$f'(x) = (2x + 1)'(x^2 - x) + (2x + 1)(x^2 - x)'$$

$$f'(x) = 2(x^2 - x) + (2x + 1)(2x - 1)$$

Développons et simplifions :

$$f'(x) = 2x^2 - 2x + 4x^2 - 2x - x + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$$