D’Équations Différentielles

I. Introduction aux Équations Différentielles

Une équation différentielle est une équation qui relie une fonction inconnue à ses dérivées. Elles sont essentielles en mathématiques appliquées, en physique et en ingénierie.

Types d'Équations Différentielles

1. Équations différentielles ordinaires (EDO) : impliquent des fonctions d'une seule variable.

2. Équations différentielles partielles (EDP) : impliquent des fonctions de plusieurs variables.

II. Équations Différentielles de Premier Ordre

A. Équations Séparables

Une équation de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Peut-être réécrite et résolue par séparation des variables :

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Correction :

1. Séparation des variables :

$$\frac{1}{y}dy = 2x\,dx$$

2. Intégration :

$\int \frac{1}{y}dy = \int 2x \ dx$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

3. Exponentiation :

$$y = e^{x^2+C} = Ce^{x^2}$$

$$y = Ce^{x^2} \quad (C \text{ constante})$$

III. Équations Linéaires de Premier Ordre

Une équation de la forme :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Peut être résolue en utilisant le facteur intégrant ($\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$).

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}$$

Correction :

1. Identifier $(p(x))\ et\ (q(x))$:

$$-(p(x) = 3)$$

$$-(q(x) = e^{2x})$$

2. Calcul du facteur intégrant :

$$\mu(x) = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}$$

3. Multiplier l'équation par ($\mu(x)$) :

$$e^{3x}\frac{dy}{dx} + 3e^{3x}y = e^{5x}$$

4. Réécrire le côté gauche :

$$\frac{d}{dx}(e^{3x}y) = e^{5x}$$

5. Intégration :

$$\int \frac{d}{dx}(e^{3x}y)\ dx = \int e^{5x}\ dx$$

$$e^{3x}y = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

$$y = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}$$

$$y = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}$$

IV. Équations Différentielles d'Ordre Supérieur

A. Équations Linéaires Homogènes

Une équation de la forme :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

Se résout en trouvant les racines du polynôme caractéristique.

Exemple

Résoudre l'équation :

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Correction :

1. Trouver le polynôme caractéristique :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

2. Facteur du polynôme :

$$(r-1)(r-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2$$

3. Solution générale :

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$