Dérivation et Étude des Fonctions

I. Dérivation

1.1. Définition de la Dérivée

La dérivée d'une fonction (f) en un point (a) est définie par :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1.2. Dérivées des Fonctions de Base

$$-((c)' = 0)(où(c) est\ une\ constante)$$

$$-((x^n)' = nx^{n-1})$$

$$-((\sin x)' = \cos x)$$

$$-((\cos x)' = -\sin x)$$

$$-((e^x)' = e^x)$$

$$-((\ln x)' = \frac{1}{x})$$

1.3. Règles de Dérivation

$$-Somme: ((f+g)' = f' + g')$$

$$-Produit: ((f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g')$$

$$-\ Quotient\ : \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (g \neq 0)$$

]

II. 2. Étude des Fonctions

2.1. Étapes pour Étudier une Fonction

1. Domaine de Définition : Identifier pour quelles valeurs (x) la fonction est définie.

2. Calculer les Dérivées : Trouver ($f'(x)$) pour étudier la monotonie.

3. Monotonie :

$$-(f) est croissante si (f'(x) > 0)$$

$$-(f) est décroissante si (f'(x) < 0)$$

4. Points Critiques : Résoudre $(f'(x) = 0)$ pour trouver les maximums et minimums locaux.

5. Étudier les Limites : Analyser le comportement de la fonction aux bornes de son domaine.

6. Tracer le Graphe : Représenter la fonction en utilisant les informations trouvées.

3. Exemple d'Étude d'une Fonction

Exemple : $(f(x) = x^2 - 4x + 3)$

Étape 1 : Domaine de Définition

- La fonction est définie pour tout $(x \in R)$.

Étape 2 : Calcul de la Dérivée

$$f'(x) = 2x - 4$$

Étape 3 : Points Critiques

Résolvons $(f'(x) = 0)$:

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Étape 4 : Monotonie

$$-(f'(x) < 0) pour (x < 2)(décroissante)$$

$$-(f'(x) > 0) pour (x > 2)(croissante)$$

Étape 5 : Valeur au Point Critique

Calculons $(f(2))$:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$-(x = 2) est\ un\ minimum\ local\ avec (f(2) = -1).$$

Étape 6 : Étudier les Limites

$$-(\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty)$$

$$-(\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty)$$

Étape 7 : Graphe de la Fonction

La fonction est une parabole ouverte vers le haut, avec un minimum en $((2,-1))$.

Conclusion

La fonction $(f(x) = x^2 - 4x + 3)$ est décroissante sur $((-\infty, 2))$ et croissante sur $((2, +\infty))$, avec un minimum local en $((2,-1))$.

III. Tableau des fonctions dérivées des fonction usuelles :

La fonction f	D_f Domaine de définition de f	La fonction dérivée f '	$D_{f'}$ Domaine de définition de f '
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$; $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$; $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$D_f=[0,+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sin x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\tan x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=1+\tan^2 x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$x\in D_g / g(x)\geq 0$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_g / g(x)>0$
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$; $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$