Étude des Fonctions Numériques

1. Définition d'une fonction numérique

Une fonction est une relation qui, à chaque élément d'un ensemble A (appelé domaine de définition), associe un unique élément d'un ensemble B (appelé ensemble d'arrivée). Si x est un élément de A et f(x) est l'élément de B associé à x, on dit que f est une fonction de A dans B.

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = 2x + 3$. Ici, le domaine de définition est tous les réels R, car pour chaque réel x, on peut calculer f(x).

2. Étude du signe d'une fonction

Pour déterminer les intervalles où une fonction est positive, négative, ou nulle, on résout l'équation $f(x) = 0$ et les inéquations $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$.

Exemple corrigé :

Pour la fonction $f(x) = x^2 - 4$, on cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.
$x^2 - 4 = 0$ implique $x^2 = 4$, donc $x = -2$ ou $x = 2$.
Les racines de f(x) sont $x = -2$ et $x = 2$.
Pour étudier le signe de f(x), on peut étudier le signe du trinôme $x^2 - 4$:
- Pour $x < -2$, $x^2 > 4$, donc $f(x) = x^2 - 4 > 0$.
- Pour $-2 < x < 2$, $x^2 < 4$, donc $f(x) = x^2 - 4 < 0$.
- Pour $x > 2$, $x^2 > 4$, donc $f(x) = x^2 - 4 > 0$.

Ainsi, f(x) est positif pour $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, négatif pour $x \in]-2, 2[$ et nul pour $x = -2$ ou $x = 2$.

3. Calcul et interprétation des limites

L'étude des limites d'une fonction permet de comprendre son comportement aux bornes de son domaine de définition et en des points particuliers (par exemple, les asymptotes).

Exemple corrigé :

Considérons la fonction $f(x) = 2x / (x - 1)$. On veut calculer lim $(x \to 1)$ f(x).
En approchant x de 1, le dénominateur $x - 1$ approche de 0, ce qui indique une asymptote verticale en $x = 1$.
- Si $x \to 1^+$ (approche par la droite), $x - 1 \to 0^+$, donc $2x / (x - 1) \to +\infty$.
- Si $x \to 1^-$ (approche par la gauche), $x - 1 \to 0^-$, donc $2x / (x - 1) \to -\infty$.

4. Dérivabilité et étude des variations

La dérivabilité d'une fonction sur un intervalle et l'étude du signe de sa dérivée permettent de déterminer ses variations (croissance ou décroissance).

Exemple corrigé :

Pour la fonction $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, calculons sa dérivée $g'(x)$:

$g'(x) = 3x^2 - 6x$.

Pour étudier les variations de g, on cherche les points critiques où $g'(x) = 0$:

$3x^2 - 6x = 0$ implique $x(3x - 6) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 2$.

Étudions le signe de $g'(x)$ dans chaque intervalle délimité par ces points :

- Pour $x < 0$, $g'(x) = 3x(x - 2) < 0$, donc $g(x)$ décroît.
- Pour $0 < x < 2$, $g'(x) = 3x(x - 2) < 0$, donc $g(x)$ décroît.
- Pour $x > 2$, $g'(x) = 3x(x - 2) > 0$, donc $g(x)$ croît.

La fonction décroît sur $]-\infty, 2[$ et croît sur $]2, +\infty[$.