Exercice 1 : Domaine de définition

Soit la fonction $(h(x) = \sqrt{3x - 6})$.

Déterminer le domaine de définition de $(h(x))$.

Correction :

- Pour que$(h(x))$soit définie, l'expression sous la racine doit être positive ou nulle : $(3x \ - \ 6 \ \geq 0)$.

- Résolvons cette inéquation : $(3x \ \geq 6), soit \ (x \ \geq 2)$.

- Le domaine de définition est donc $(D\_h \ = \ [2, +\infty[ )$.

Exercice : Parité d'une fonction

Soit la fonction $(k(x) = x^3 - x)$.

Étudier la parité de la fonction $(k(x))$.

Correction :

- Calculons $(k(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x)$.

- On remarque que $(k(-x) = -k(x))$,donc la fonction $(k(x))$ est impaire.

Exercice 3 : Image d'une fonction

Soit la fonction $(l(x) = 2x^2 + 3)$.

Déterminer l'image de la fonction $(l(x))$.

Correction :

- La fonction $(l(x))$ est un polynôme de degré 2, donc une parabole.

- Le terme $(2x^2)$ est toujours positif ou nul, donc $(l(x) \geq 3)$.

- L'image de $(\ l(x) \ ) \ est \ (\ "\{Im\}(l) \ = \ [3, +\infty[ )$.

Exercice 4 : Fonction composée

Soit $(m(x) = \frac{1}{x}) \ et \ (n(x) = x^2 - 1)$.

Déterminer le domaine de définition de la fonction composée $(p(x) = m\big(n(x)\big))$.

Correction :

$$-(p(x) = \frac{1}{x^2 - 1}).$$

$-(p(x))$ est définie lorsque le dénominateur est différent de 0, donc $(x^2 - 1 \neq 0)$.

- Résolvons $(x^2 - 1 = 0), soit \ (x = \pm 1)$.

- Le domaine de définition est $(D_p = R \setminus \{-1,1\})$.

Exercice 5 : Analyse d'une Fonction Complexe

Soit la fonction $(f: R \rightarrow R)$ définie par :

$$[f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}]$$

1. Déterminez le domaine de définition de la fonction (f).

2 : Vérifiez la continuité de la fonction (f) sur son domaine de définition. Précisez si la fonction est continue en tous les points de son domaine.

3. a) Trouvez les asymptotes verticales de la fonction (f).

b) Trouvez les asymptotes horizontales ou obliques de la fonction (f).

4. Étudiez le comportement de la fonction (f) lorsque (x) $tend\ vers$ ($+\infty$) et ($-\infty$).

5. a) Trouvez les points critiques de la fonction (f).

b) Déterminez la nature de ces points (maximum, minimum ou point selle) en utilisant la dérivée seconde.

6. Tracez le graphe de la fonction (f) en utilisant les informations trouvées dans les parties précédentes.

Solutions :

1. Domaine de Définition :

La fonction (f) est définie lorsque le dénominateur est différent de zéro. Donc, on doit résoudre :

$$[x^2 - 2x + 1 = 0]$$

$$[(x-1)^2 = 0]$$

Ainsi, ($x = 1$) est le seul point où le dénominateur s'annule. Donc, le domaine de définition de (f) est :

$$[R \setminus \{1\}]$$

2. Continuité :

La fonction (f) est continue sur$(R \setminus \{1\})$. $\grave{A}(x = 1)$, il y a une discontinuité car le dénominateur s'annule en ce point.

3. Asymptotes :

a) Asymptotes verticales :

Il y a une asymptote verticale à ($x = 1$), puisque le dénominateur s'annule en ce point.

b) Asymptotes horizontales ou obliques :

Pour déterminer les asymptotes horizontales, analysons le comportement de ($f(x)$) lorsque ($x \to \pm\infty$).

La fonction (f) peut être simplifiée pour grandes valeurs de (x) en négligeant les termes de degré inférieur dans le numérateur et le dénominateur :

$$[f(x) \approx \frac{3x^3}{x^2} = 3x]$$

Ainsi, la fonction n'a pas d'asymptote horizontale, mais une asymptote oblique ($y = 3x$).

4. Comportement à l'infini :

Lorsque ($x \to \infty$) ou ($x \to -\infty$), on a :

$$[f(x) \approx 3x]$$

$$Donc, (f(x) \to \infty)\ lorsque\ (x \to \infty) et (f(x) \to -\infty)\ lorsque\ (x \to -\infty).$$

5. Points Critiques :

a) Points critiques

Calculons la dérivée première de (f) en utilisant la règle du quotient :

$$[f'(x) = \frac{(9x^2 - 10x + 2)(x^2 - 2x + 1) - (3x^3 - 5x^2 + 2x - 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2}]$$

En résolvant ($f'(x) = 0$), nous trouvons les points critiques.

b) Nature des points critiques :

Pour déterminer la nature des points critiques, calculons la dérivée seconde de (f) et analysons les valeurs en ces points.

6. Graphe de la Fonction :

Tracez le graphe de la fonction en prenant en compte les asymptotes, les points critiques, et le comportement général aux infinis.