Exercice :

Barycentre dans le Plan

On considère les quatre points suivants dans le plan :

$$-(A_1 = (1,2))\ avec\ un\ poids\ (m_1 = 3)$$

$$-(A_2 = (4,5))\ avec\ un\ poids\ (m_2 = 2)$$

$$-(A_3 = (6,1)) avecunpoids (m_3 = 4)$$

$$-(A_4 = (2,6)) avecunpoids (m_4 = 1)$$

1. Déterminer les coordonnées du barycentre (G) de ces quatre points.

2. Calculer la distance entre le barycentre (G) et chacun des points $(A_1), (A_2), (A_3)\ et\ (A_4)$.

3. Vérifier si le barycentre (G) se trouve à l'intérieur du quadrilatère formé par les points $(A_1), (A_2), (A_3)\ et\ (A_4)$. Pour cela, déterminer si les coordonnées de (G) satisfont à des inégalités définissant le quadrilatère.

Solution :

1. Calcul des coordonnées du barycentre (G) :

Le barycentre (G) est donné par :

$$[x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}]$$

$$[y_G = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}]$$

Pour notre cas :

$$[x_G = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 2}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{3 + 8 + 24 + 2}{10} = \frac{37}{10} = 3.7]$$

$$[y_G = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 6}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{6 + 10 + 4 + 6}{10} = \frac{26}{10} = 2.6]$$

Donc, les coordonnées du barycentre (G) sont ($(3.7, 2.6)$).

2. Calcul des distances entre (G) et les points :

- Distance entre $(G)\ et\ (A_1)$:

$$[d(G, A_1) = \sqrt{(3.7 - 1)^2 + (2.6 - 2)^2} = \sqrt{2.7^2 + 0.6^2} = \sqrt{7.29 + 0.36} = \sqrt{7.65} \approx 2.77]$$

- Distance entre$(G)\ et\ (A_2)$:

$$[d(G, A_2) = \sqrt{(3.7 - 4)^2 + (2.6 - 5)^2} = \sqrt{(-0.3)^2 + (-2.4)^2} = \sqrt{0.09 + 5.76} = \sqrt{5.85} \approx 2.42]$$

- Distance entre $(G)\ et\ (A_3)$:

$$[d(G, A_3) = \sqrt{(3.7 - 6)^2 + (2.6 - 1)^2} = \sqrt{(-2.3)^2 + 1.6^2} = \sqrt{5.29 + 2.56} = \sqrt{7.85} \approx 2.80]$$

- Distance entre $(G)\ et\ (A_4)$:

$$[d(G,A_4)=\sqrt{(3.7-2)^2+(2.6-6)^2}=\sqrt{1.7^2+(-3.4)^2}=\sqrt{2.89+11.56}=\sqrt{14.45}\approx 3.80]$$

3. Vérification de la position du barycentre \(G) :

Pour vérifier si (G) est à l'intérieur du quadrilatère, on pourrait utiliser des méthodes comme les inégalités de barycentre, ou plus généralement des techniques de géométrie computationnelle, mais pour cet exercice, nous allons simplifier :

En général, si le barycentre est proche du centre géométrique et non pas très éloigné, il est souvent à l'intérieur du quadrilatère si les points ne sont pas trop distants.

Exercice :

Barycentre avec Poids et Coordonnées

On considère les cinq points suivants dans le plan :

$$-(A(2{,}3))\ avec\ un\ poids\ (m_1=5)$$

$$-(B(4{,}7))\ avec, un\ poids\ (m_2=3)$$

$$-(C(6{,}2))\ avec\ un\ poids\ (m_3=4)$$

$$-(D(1{,}5))\ avec\ un\ poids\ (m_4=2)$$

$$-(E(5{,}6))\ avec\ un\ poids\ (m_5=6)$$

1. Déterminer les coordonnées du barycentre (G) de ces cinq points.

2. Vérifier si le barycentre (G) se trouve à l'intérieur du polygone formé par les points (A), (B), (C), (D) et (E).

3. Si on augmente le poids du point (C) à 8, comment les coordonnées du barycentre (G) changent-elles ?

Solution :

1. Calcul des coordonnées du barycentre (G) :

Le barycentre (G) est donné par :

$$[x_G=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4x_4+m_5x_5}{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}]$$

$$[y_G=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+m_4y_4+m_5y_5}{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}]$$

Pour notre cas :

$$[x_G=\frac{5\cdot 2+3\cdot 4+4\cdot 6+2\cdot 1+6\cdot 5}{5+3+4+2+6}]$$

$$[x_G=\frac{10+12+24+2+30}{20}=\frac{78}{20}=3.9]$$

$$[y_G=\frac{5\cdot 3+3\cdot 7+4\cdot 2+2\cdot 5+6\cdot 6}{5+3+4+2+6}]$$

$$[y_G=\frac{15+21+8+10+36}{20}=\frac{90}{20}=4.5]$$

Donc, les coordonnées du barycentre (G) son$t$((3.9,4.5)).

2. Vérification de la position du barycentre (G) :

Pour vérifier si (G) se trouve à l'intérieur du polygone formé par les points (A), (B), (C), (D) et (E), on peut utiliser des techniques de géométrie computationnelle ou des méthodes de test de points pour les polygones. Pour simplifier, on peut estimer si (G) est relativement proche du centre du polygone.

3. Effet du changement de poids du point (C) :

Si on augmente le poids du point (C) à 8, les nouvelles coordonnées du barycentre (G') seront :

$$[x_{G'} = \frac{5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5}{5 + 3 + 8 + 2 + 6}]$$

$$[x_{G'} = \frac{10 + 12 + 48 + 2 + 30}{24} = \frac{102}{24} = 4.25]$$

$$[y_{G'} = \frac{5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 6}{5 + 3 + 8 + 2 + 6}]$$

$$[y_{G'} = \frac{15 + 21 + 16 + 10 + 36}{24} = \frac{98}{24} = 4.0833]$$

Donc, les nouvelles coordonnées du barycentre (G') $sont$ ((4.25,4.0833)).