**Exercice 1 :**

Produit Scalaire avec Applications

On considère les vecteurs suivants dans le plan :

$$-(\vec{u} = (2, -1))$$

$$-(\vec{v} = (3,4))$$

$$-(\vec{w} = (-1,2))$$

1. Calculer le produit scalaire $(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

2. Déterminer l'angle entre les vecteurs $(\vec{u})\ et\ (\vec{v})$.

3. Vérifier si les vecteurs $(\vec{u})\ et\ (\vec{w})$ sont orthogonaux.

4. Calculer la projection du vecteur $(\vec{u})\ sur\ le\ vecteur\ (\vec{v})$.

5. Trouver un vecteur $(\vec{z})\ telque\ (\vec{z}) soit\ orthogonal$ à $(\vec{u})\ et\ que\ (\vec{z} \cdot \vec{v} = 7)$.

**Solution :**

1. Calcul du produit scalaire $(\vec{u} \cdot \vec{v})$:

$$[\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 6 - 4 = 2]$$

2. Détermination de l'angle entre les vecteurs $(\vec{u})\ et\ (\vec{v})$:

D'abord, calculons les normes des vecteurs :

$$[|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}]$$

$$[|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5]$$

Ensuite :

$$[\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{2}{5\sqrt{5}}]$$

L'angle ( θ) est :

$$[\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)]$$

3. Vérification de l'orthogonalité des vecteurs$(\vec{u})\ et\ (\vec{w})$:

Calculons le produit scalaire $(\vec{u} \cdot \vec{w})$:

$$[\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -2 - 2 = -4]$$

Les vecteurs ne sont pas orthogonaux car le produit scalaire n'est pas nul.

4. Calcul de la projection de $(\vec{u})\ sur\ (\vec{v})$:

La projection de $(\vec{u})\ sur\ (\vec{v})$est donnée par :

$$[\text{Proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}]$$

Calculons($|\vec{v}|^2$):

$$[|\vec{v}|^2 = 5^2 = 25]$$

Ainsi :

$$[\mathrm{Proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{2}{25} \cdot (3,4) = \left(\frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right)]$$

5. Trouver un vecteur ($\vec{z}$) $telque$ ($\vec{z}$) $soit\ orthogonal$ à($\vec{u}$) $et\ que$ ($\vec{z} \cdot \vec{v} = 7$) :

Soit($\vec{z} = (x, y)$). Nous avons les conditions suivantes :

$$-(\vec{z} \cdot \vec{u} = 0): (2x - y = 0)$$

$$-(\vec{z} \cdot \vec{v} = 7): (3x + 4y = 7)$$

Résolvons le système d'équations :

De la première équation : ( $y = 2x$ )

Substituons dans la deuxième équation :

$$[3x + 4(2x) = 7]$$

$$[3x + 8x = 7]$$

$$[11x = 7]$$

$$[x = \frac{7}{11}]$$

$$[y = 2x = 2 \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{11}]$$

Donc, un vecteur($\vec{z}$) qui satisfait les conditions est :

$$[\vec{z} = \left(\frac{7}{11}, \frac{14}{11}\right)]$$

### Exercice 2 :

Produit Scalaire et Applications Avancées

On considère les vecteurs suivants dans le plan :

$$-(\vec{u} = (1,2,-1))$$

$$-(\vec{v} = (3,1,2))$$

$$-(\vec{w} = (-2,4,0)$$

1. Calculer le produit scalaire ($\vec{u} \cdot \vec{v}$)

2. Déterminer l'angle entre les vecteurs ($\vec{u}$) $et$ ($\vec{v}$).

3. Vérifier si les vecteurs ($\vec{u}$) $et$ ($\vec{w}$) sont orthogonaux.

4. Calculer la projection du vecteur($\vec{v}$) $sur\ le\ vecteur$ ($\vec{w}$).

5.Trouver un vecteur ($\vec{z}$) $telque$ ($\vec{z}$) $soit\ orthogonal$ à($\vec{u}$) $et\ que$ ($\vec{z} \cdot \vec{v} = 10$).

**Solution :**

1. Calcul du produit scalaire$(\vec{u} \cdot \vec{v})$:

$$[\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 3 + 2 - 2 = 3]$$

2. Détermination de l'angle entre les vecteurs $(\vec{u}\,) et\ (\vec{v})$:

D'abord, calculons les normes des vecteurs :

$$[|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}]$$

$$[|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}]$$

Ensuite :

$$[\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{84}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}]$$

$$L'angle(\theta)est:$$

$$[\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{21}}\right)]$$

3. Vérification de l'orthogonalité des vecteurs $(\vec{u})\ et\ (\vec{w})$:Calculons le produit scalaire $(\vec{u} \cdot \vec{w})$:

$$[\vec{u} \cdot \vec{w} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 = -2 + 8 = 6]$$

Les vecteurs ne sont pas orthogonaux car le produit scalaire n'est pas nul.

4. Calcul de la projection de $(\vec{v})\ sur\ (\vec{w})$:

La projection de $(\vec{v})\ sur\ (\vec{w})$ est donnée par :

$$[\mathrm{Proj}_{\vec{w}}\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w}]$$

Calculons le produit scalaire $(\vec{v} \cdot \vec{w})$:

$$[\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = -6 + 4 = -2]$$

Calculons $(|\vec{w}|^2)$ :

$$[|\vec{w}|^2 = (-2)^2 + 4^2 + 0^2 = 4 + 16 = 20]$$

Ainsi :

$$[\mathrm{Proj}_{\vec{w}}\vec{v} = \frac{-2}{20} \cdot (-2{,}4{,}0) = \left(\frac{4}{20}, \frac{-8}{20}, 0\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 0\right)]$$

5. Trouver un vecteur $(\vec{z})\ telque\ (\vec{z})$soit orthogonal à \( ⃗{u} ) $et\ que$ ( ⃗{z} · ⃗{v} = 10 ) :

Soit $(\vec{z} = (x, y, z))$. Nous avons les conditions suivantes :

$$-(\vec{z} \cdot \vec{u} = 0): (1 \cdot x + 2 \cdot y + (-1) \cdot z = x + 2y - z = 0)$$

$$-(\vec{z} \cdot \vec{v} = 10): (3 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z = 3x + y + 2z = 10)$$

Résolvons le système d'équations :

De la première équation : $( z = x + 2y )$

Substituons dans la deuxième équation :

$$[3x + y + 2(x + 2y) = 10]$$

$$[\ 3x\ +\ y\ +\ 2x\ +\ 4y\ =\ 10\ ]$$

$$[\ 5x\ +\ 5y\ =\ 10\ ]$$

$$[\ x\ +\ y\ =\ 2\ ]$$

Ainsi :

$$[\ z\ =\ x\ +\ 2y\ =\ 2\ -\ y\ +\ 2y\ =\ 2\ +\ y\ ]$$

En choisissant ( $y\ =\ 0$ ), nous avons :

$$[\ x\ =\ 2\ ]$$

$$[\ z\ =\ 2\ ]$$

Donc, un vecteur ($\vec{z}$) qui satisfait les conditions est :

$$[\vec{z} = (2,0,2)]$$