Exercice 1 :

$$I = \int_1^3 (2x + 1)\ dx$$

Correction :

1. Calcul de l'intégrale :

$$I = \int_1^3 2x\ dx + \int_1^3 1\ d$$

2. Calcul des intégrales séparées :

- Pour ($\int 2x\ dx$):

$$\int 2x\ dx = x^2 \quad \Rightarrow \quad [x^2]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

-Pour($\int 1\ dx$):

$$\int 1\ dx = x \quad \Rightarrow \quad [x]_1^3 = 3 - 1 = 2$$

3. Résultat final :

$$I\ =\ 8\ +\ 2\ =\ 10$$

Exercice 2 :

$$I = \int_0^2 x\sqrt{x^2 + 1}\,dx$$

Correction

1. Substitution :

Soit $(u = x^2 + 1), alors(du = 2x\,dx)ou(dx = \frac{du}{2x})$.

2. Changement des limites :

- Quand $(x = 0), (u = 0^2 + 1 = 1)$

-Quand $(x = 2), (u = 2^2 + 1 = 5)$

3. Transformation de l'intégrale :

$$I = \int_1^5 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2}\ du = \frac{1}{2}\int_1^5 u^{1/2}\ du$$

4. Calcul de l'intégrale :

$$\int u^{1/2}\ du = \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}u^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^5$$

$$= \frac{2}{3}\left(5^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{2}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(5\sqrt{5} - 1\right) = \frac{1}{3} \left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

Exercice 3 :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ dx$$

Correction

1. Calcul de l'intégrale :

$$I = -\cos(x) \quad \Rightarrow \quad [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)$$

$$= 0 + 1 = 1$$

Exercice 4 :

$$I = \int_0^1 x^2 \ln(x)\ dx$$

Correction

1. Utilisation par parties :

On utilise la formule d'intégration par parties :

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

Choisissons :

$$-(u = \ln(x))(\Rightarrow du = \frac{1}{x}\ dx)$$

$$-(dv = x^2\ dx)(\Rightarrow v = \frac{x^3}{3})$$

2. Application de la formule :

$$I = \left[\ln(x) \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\ dx$$

$$= \left[\ln(1) \cdot \frac{1^3}{3} - \lim_{x \to 0^+} \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3}\right] - \frac{1}{3} \int_0^1 x^2\ dx$$

3. Évaluation des termes :

$-(\ln(1) = 0)$, donc le premier terme est (0).

- Pour$(\lim_{x \to 0^+} \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3})$, on note que$(\ln(x) \to -\infty)\ et\ (x^3$\to 0 \). Utilisons la forme indéterminée :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-3/x^4} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0$$

$$-Donc, (\lim_{x \to 0^+} \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} = 0).$$

4. Calcul de l'intégrale restante :

$$I = 0 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$$

$$I = -\frac{1}{9}$$