Exercice 1 :

Dérivée d'une fonction polynomiale

Trouver la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 5$$

Solution :

Appliquons la règle de dérivation des puissances pour chaque terme :

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^{3-1} - 6 \cdot 2x^{2-1} + 3 \cdot 1x^{1-1}$$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x + 3$$

La dérivée de la fonction $(f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 5)\ est\ donc\ (f'(x) = 12x^2 - 12x + 3)$.

Exercice 2 :

Dérivée d'une fonction rationnelle

Trouver la dérivée de la fonction suivante :

$$g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}$$

Solution :

Utilisons la règle de dérivation du quotient. Soit $(u(x) = 2x^2 - 3x + 1)\ et\ (v(x) = x - 2)$.

$$u'(x) = 4x - 3, \quad v'(x) = 1$$

La règle de dérivation du quotient est :

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

Appliquons cette formule :

$$g'(x) = \frac{(4x - 3)(x - 2) - (2x^2 - 3x + 1)(1)}{(x - 2)^2}$$

Développons le numérateur :

$$g'(x) = \frac{4x^2 - 8x - 3x + 6 - (2x^2 - 3x + 1)}{(x - 2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x^2 - 11x + 6 - 2x^2 + 3x - 1}{(x - 2)^2}$$

Simplifions :

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 5}{(x - 2)^2}$$

La dérivée de la fonction $(g(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-2})\ est\ donc\ (g'(x) = \frac{2x^2-8x+5}{(x-2)^2})$.

Exercice 3 :

Dérivée d'une fonction composée

Trouver la dérivée de la fonction suivante :

$$h(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$$

Solution :

Utilisons la règle de dérivation d'une fonction composée. Soit $(u(x) = x^2 + 3x + 2), alors\ (h(x) = \ln(u(x)))$.

La dérivée de $(u(x))$ est :

$$u'(x) = 2x + 3$$

La dérivée de $(\ln(u))$ par rapport à $(u)\ est\ (\frac{1}{u})$.

Donc, par la règle de dérivation d'une fonction composée :

$$h'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$h'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \cdot (2x + 3)$$

$$h'(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$$

La dérivée de la fonction $(h(x) = \ln(x^2 + 3x + 2))$ est donc $(h'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2})$.

Exercice 4 :

Trouver les points critiques, les intervalles de croissance et décroissance, et les points d'inflexion de la fonction suivante :

$$k(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 24x + 8$$

Solution :

1. Calcul de la dérivée première :

$$k'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 24$$

2. Trouver les points critiques :

Les points critiques se trouvent là où $(k'^{(x)}\ =\ 0)$.

$$4x^3 - 12x^2 + 12x - 24 = 0$$

Facteur commun :

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 6) = 0$$

Divisons l'équation par 4 :

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 6 = 0$$

Essayons de trouver les racines en utilisant la méthode de substitution (ou d'autres méthodes numériques). On peut voir que ($x = 2$) est une racine. Ensuite, on peut diviser par (($x - 2$)) pour trouver les autres racines.

En factorisant, on obtient :

$$(x-2)(x^2 - x + 3) = 0$$

Le trinôme ($x^2 - x + 3$) n'a pas de racines réelles (discriminant négatif), donc la seule racine réelle est ($x = 2$).

3. Analyser la croissance/décroissance :

Analysons le signe de ($k'(x)$) de part et d'autre de ($x = 2$).

- Pour $(x < 2), par\ exemple\ (x = 0), (k'(0) = -24)$, donc la fonction est décroissante.

- Pour $(x > 2), par\ exemple\ (x = 3), (k'(3) = 24)$, donc la fonction est croissante.

Ainsi, ($x = 2$) est un minimum local.

4. Calcul de la dérivée seconde :

$$k''(x) = 12x^2 - 24x + 12$$

5. Trouver les points d'inflexion :

Les points d'inflexion se trouvent là où ($k''(x) = 0$).

$$12x^2 - 24x + 12 = 0$$

Divisons l'équation par 12 :

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

Ainsi, ($x = 1$) est le seul point où la dérivée seconde s'annule. Évaluons le signe de ($k''(x)$)de part et d'autre de \($x = 1$) :

- Pour ($x < 1$), par exemple ($x = 0$), ($k''(0) = 12$),donc la courbe est concave vers le haut.

- Pour ($x > 1$), par exemple ($x = 2$), ($k''(2) = 0$), mais comme il n'y a pas de changement de signe, il n'y a pas de point d'inflexion. ($x = 1$) est un point où la courbure change, mais sans changement de concavité.

En résumé :

- Point critique : ($x = 2$) (minimum local).

- Intervalles de croissance : (($2, +\infty$)).

- Intervalles de décroissance : (($-\infty, 2$)).

- Pas de point d'inflexion en termes de changement de concavité.