Exercice 1 :

Résoudre l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = 3y(1-y)$$

Correction

1. Séparation des variables :

$$\frac{1}{y(1-y)}dy = 3\,dx$$

2. Décomposition en fractions :

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}$$

En multipliant par $(y(1-y))$ et en égalant, on obtient :

$$1 = A(1-y) + By$$

En choisissant ($y = 0$), ($A = 1$). En choisissant ($y = 1$), ($B = 1$).

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

3. Intégration :

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \int 3\ dx$$

$$\ln|y| - \ln|1-y| = 3x + C$$

$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = 3x + C$$

$$\frac{y}{1-y} = e^{3x+C} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{e^{3x+C}}{1+e^{3x+C}}$$

Exercice 2 :

Résoudre l'équation :

$$\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}$$

Correction :

1. Déterminer $(p(x))\ et\ (q(x))$:

$$-(p(x) = 4)$$

$$-(q(x) = e^{2x})$$

2. Calcul du facteur intégrant :

$$\mu(x) = e^{\int 4\,dx} = e^{4x}$$

3. Multiplier l'équation par ($\mu(x)$):

$$e^{4x}\frac{dy}{dx}+4e^{4x}y=e^{6x}$$

4. Réécrire le côté gauche :

$$\frac{d}{dx}(e^{4x}y)=e^{6x}$$

5. Intégration :

$$\int\frac{d}{dx}(e^{4x}y)\ dx=\int e^{6x}\ dx$$

$$e^{4x}y=\frac{1}{6}e^{6x}+C$$

$$y=\frac{1}{6}e^{2x}+Ce^{-4x}$$

Exercice 3 :

Résoudre l'équation :

$$y''+5y'+6y=0$$

Correction

1. Trouver le polynôme caractéristique :

$$r^2+5r+6=0$$

2. Facteur du polynôme :

$$(r+2)(r+3)=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=-2, \quad r_2=-3$$

3. Solution générale :

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$$

Exercice 4 :

$$y''-4y'+4y=e^{2x}$$

Correction :

L'équation associée est :

$$y''-4y'+4y=0$$

$$r^2-4r+4=0$$

$$(r-2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad r=2 \text{ (racine double)}$$

La solution générale de l'équation homogène est :

$$y_h=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$$

Nous cherchons une solution particulière (y_p). Étant donné que le terme de droite est (e^{2x}), nous pouvons essayer une solution de la forme :

$$y_p = Ax^2e^{2x}$$

a. Calculer (y_p') et (y_p'')

Première dérivée :

$$y_p' = A(2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}) = Ae^{2x}(2x + 2x^2)$$

Deuxième dérivée :

$$y_p'' = A\left(2e^{2x} + 2xe^{2x}(2) + 2e^{2x}(2x + 2x^2)\right) = Ae^{2x}(2 + 4x + 4x^2)$$

b. Substituer dans l'équation

Substituons (y_p), (y_p') et (y_p'') dans l'équation :

$$Ae^{2x}(2 + 4x + 4x^2) - 4Ae^{2x}(2x + x^2) + 4Ax^2e^{2x} = e^{2x}$$

Simplifions :

$$Ae^{2x}(2 + 4x + 4x^2 - 8x - 4x^2 + 4x^2) = e^{2x}$$

$$Ae^{2x}(2 - 4x) = e^{2x}$$

c. Égaliser les coefficients

Pour que cette équation soit vraie pour tout (x), on doit avoir :

$$A(2 - 4x) = 1$$

Donc, ($A = -\frac{1}{4}$).

3. Écrire la solution particulière

La solution particulière est :

$$y_p = -\frac{1}{4}x^2e^{2x}$$

4. Solution générale

La solution générale de l'équation est donc :

$$y = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} - \frac{1}{4}x^2e^{2x}$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} - \frac{1}{4}x^2e^{2x}$$