Exercice 1 :

Étude du Signe d'une Fonction

Considérons la fonction ($f(x) = x^2 - 5x + 6$).

1. Déterminer les racines de la fonction.

2. Étudier le signe de ($f(x)$)en fonction des intervalles définis par les racines.

Solution :

1. Pour déterminer les racines, on résout l'équation ($f(x) = 0$):

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

On factorise cette équation :

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

Les racines sont donc ($x = 2$) et ($x = 3$).

2. Étudions le signe de($f(x)$):

- Pour ($x < 2$), les deux facteurs (($x - 2$)) et (($x - 3$)) sont négatifs, donc ($f(x) = (x - 2)(x - 3) > 0$).

- Pour ($2 < x < 3$), (($x - 2) > 0$) et (($x - 3) < 0$), $donc$ ($f(x) = (x - 2)(x - 3) < 0$).

- Pour ($x > 3$), les deux facteurs sont positifs, donc ($f(x) = (x - 2)(x - 3) > 0$).

Ainsi, ($f(x)$) est positif pour ($x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$) $et\ négatif\ pour$ ($x \in]2, 3[$).

Exercice 2 :

Étude Complète d'une Fonction

Considérons la fonction ($g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$).

1. Déterminer la dérivée de ($g(x)$) et les points critiques.

2. Étudier les variations de ($g(x)$).

3. Trouver les limites de ($g(x)$) $lors\ que$ (x) $tend\ vers$ ($+\infty$) et ($-\infty$).

4. Déterminer les intervalles de positivité et de négativité de ($g(x)$).

5. Tracer le tableau de variation de ($g(x)$).

Solution :

1. Calcul de la dérivée de ($g(x)$):

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Pour trouver les points critiques, on résout ($g'(x) = 0$):

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

On factorise cette équation :

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

Les points critiques sont ($x = 1$) et ($x = 3$).

2. Étude des variations de $(g(x))$:

- Pour $(x < 1), (g'(x) > 0), donc\ (g(x))$ est croissante.
- Pour $(1 < x < 3), (g'(x) < 0), donc\ (g(x))$ est décroissante.
- Pour $(x > 3), (g'(x) > 0), donc\ (g(x))$ est croissante.

3. Calcul des limites :

$\lim_{x \to +\infty} g\,(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} g\,(x) = -$

4. Étude du signe de $(g(x))$:

Pour déterminer les intervalles de positivité et de négativité, on trouve les racines de $(g(x) = 0)$ (si possible) et on étudie le signe de la fonction dans les intervalles délimités par ces racines.

5. Tableau de variations de $(g(x))$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$	$\nearrow$