Exercice 1 :

Vecteurs dans l'Espace

Soit $(A(2,-1{,}3))et(B(-1{,}2,-4))$. Trouvez les coordonnées du vecteur $(\overrightarrow{AB})$ et calculez la norme de ce vecteur.

Correction :

1. Coordonnées de $(\overrightarrow{AB})$:

$\overrightarrow{AB} = (-1-2{,}2-(-1),-4-3) = (-3{,}3,-7)$

2. Norme de $(\overrightarrow{AB})$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-7)^2} = \sqrt{9+9+49} = \sqrt{67}$$

Exercice 2 :

Produit Scalaire

Soit $(\,\vec{}\{u\} = (1,-2,3))\ et\ (\,\vec{}\{v\} = (4,0,-1)$. Trouvez le produit scalaire $(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et vérifiez si les vecteurs sont orthogonaux.

Correction :

1. Produit scalaire :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\cdot 4 + (-2)\cdot 0 + 3\cdot(-1) = 4 - 3 = 1$

2. Les vecteurs ne sont pas orthogonaux car le produit scalaire n'est pas nul.

Exercice 3 :

Plan dans l'Espace

Trouvez l'équation du plan passant par les points $(A(1{,}1{,}1)), (B(2{,}0{,}3)), et(C(0{,}2{,}2))$.

Correction :

1. Trouvez deux vecteurs dans le plan : $(\overrightarrow{AB})\ et\ (\overrightarrow{AC})$.

$$\overrightarrow{AB} = (2-1{,}0-1{,}3-1) = (1,-1{,}2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-1{,}2-1{,}2-1) = (-1{,}1{,}1)$$

2. Calculez le produit vectoriel $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$ pour trouver le vecteur normal au plan.

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \big((-1\cdot 1) - (2\cdot 1)\big)i - \big((1\cdot 1) - (2\cdot -1)\big)j + \big((1\cdot 1) - (-1\cdot -1)\big)k$

$= (-3, 3, 0)$

3. L'équation du plan est :

$$-3(x-1)+3(y-1)+0(z-1)=0$$

$$-3x + 3y = -3$$

$$\text{Equation du plan : } -3x+3y=-3 \text{ ou } x-y=1$$

Exercice 4 :

Distance entre un Point et un Plan

Calculez la distance entre le point $(P(1,2,3)) et le plan (2x-3y+4z=10)$.

Correction :

1. Distance entre (P) et le plan :

$$d=\frac{|2\cdot 1-3\cdot 2+4\cdot 3-10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}$$

$$d=\frac{|2-6+12-10|}{\sqrt{4+9+16}}$$

$$d=\frac{|-2|}{\sqrt{29}}=\frac{2}{\sqrt{29}}$$

Exercice 5 :

Soit un tétraèdre dont les sommets sont$(A(1,2,3)),(B(4,0,-1)),(C(2,-1,2)) et (D(3,3,1))$.
Répondez aux questions suivantes :

1. Trouvez les équations des trois plans formés par les faces du tétraèdre $(ABC),(ABD), et (ACD)$.

2. Déterminez les coordonnées du point d'intersection des trois plans.

Correction :

1. Plans :

- Plan (ABC) : Déterminé par les points $(A),(B), et (C)$.

-Vecteurs: $(\overrightarrow{AB}=(3,-2,-4)) et (\overrightarrow{AC}=(1,-3,-1))$.

- Produit vectoriel : $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\big(-2\cdot -1-(-4\cdot -3),-4\cdot 1-(-4\cdot 1),\big(3\cdot -3-(-2\cdot 1)\big)\big)=(-14,0,-7))$.

- Équation du plan : $(-14(x-1)+0(y-2)-7(z-3)=0) ou (-14x-7z=-14-21) donc (-14x-7z=-35)$.

- Plan (ABD) : Déterminé par les points $(A),(B), et (D)$.

- Vecteurs : $(\overrightarrow{AB}=(3,-2,-4)) et (\overrightarrow{AD}=(2,1,-2))$.

- Produit vectoriel : $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\big(-2\cdot -2-(-4\cdot 1),-4\cdot 2-(-2\cdot 2),\big(3\cdot 1-(-2\cdot 2)\big)\big)=(0,-4,7))$.

- Équation du plan : $(0(x-1)-4(y-2)+7(z-3)=0)\ ou\ (-4y+7z=-8+21)\ donc\ (-4y+7z=13)$.

- Plan $(\ ACD\ )$: Déterminé par les points $(\ A\ ),(\ C\ ),et\ (\ D\ )$.

- Vecteurs: $(\overrightarrow{AC}=(1,-3,-1))et(\overrightarrow{AD}=(2,1,-2))$.

- Produit vectoriel :$(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\big(-3\cdot-2-(-1\cdot1),-1\cdot2-(-1\cdot2),\big(1\cdot1-(-3\cdot2)\big)\big)=(7,0,7))$.

- Équation du plan : $(7(x-1)+0(y-2)+7(z-3)=0)\ ou\ (7x+7z=7+21)\ donc\ (7x+7z=28)\ ou\ (x+z=4)$.

2. Intersection des trois plans :

Résoudre le système :

$$\begin{cases}-14x-7z=-35\\-4y+7z=13\\x+z=4\end{cases}$$

Par substitution ou méthode de matrices, on trouve :

$$x=2,\ y=-1,\ z=2$$

Le point d'intersection est $((2,-1,2))$.

t préparer le document Word avec ces exercices corrigés et te l'envoyer.