Exercice 1 :

Suite Arithmétique

Considérons la suite arithmétique ((u_n)) définie par \($u\_1 = 7$) et la raison ($r = -2$).

1. Calculer les 6 premiers termes de la suite.

2. Déterminer la formule du terme général (u_n).

3. Trouver la somme des 10 premiers termes de la suite.

Solution :

1. Les termes sont :

$$[u_1 = 7]$$

$$[u_2 = u_1 + r = 7 - 2 = 5]$$

$$[u_3 = u_2 + r = 5 - 2 = 3]$$

$$[u_4 = u_3 + r = 3 - 2 = 1]$$

$$[u_5 = u_4 + r = 1 - 2 = -1]$$

$$[u_6 = u_5 + r = -1 - 2 = -3]$$

2. La formule du terme général est :

$$[u_n = u_1 + (n-1)r = 7 + (n-1)(-2) = 7 - 2(n-1) = 9 - 2n]$$

3. La somme des 10 premiers termes est :

$$[S_{10} = \frac{10}{2}(2u_1 + (10-1)r)]$$

$$[S_{10} = 5\big(2 \cdot 7 + 9 \cdot (-2)\big)]$$

$$[S_{10} = 5(14 - 18) = 5 \cdot (-4) = -20]$$

Exercice 2 :

Suite Géométrique

Considérons la suite géométrique ((v_n)) définie par ($v_1 = 3$) et la raison ($q = \frac{1}{2}$).

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

2. Déterminer la formule du terme général (v_n).

3. Trouver la somme des 6 premiers termes de la suite.

Solution :

1. Les termes sont :

$$[v_1 = 3]$$

$$[v_2 = v_1 \cdot q = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}]$$

[$v_3 = v_2 \cdot q = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$]

$$[v_4 = v_3 \cdot q = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}][v_5 = v_4 \cdot q = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}]$$

2. La formule du terme général est :

[$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$]

3. La somme des 6 premiers termes est :

$$[S_6 = v_1 \frac{1 - q^6}{1 - q}]$$

$$[S_6 = 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}}]$$

$$[S_6 = 3 \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}}]$$

$$[S_6 = 3 \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{64}\right)]$$

$$[S_6 = 6 \left(\frac{63}{64}\right) = \frac{378}{64} = \frac{189}{32}]$$

Exercice 3 :

Considérons la suite ((w_n)) définie par ($w_1 = 4$) et la suite arithmético-géométrique où chaque terme est donné par :

$$[w_n = 4 + (n-1) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}]$$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite ((w_n)).

2. Déterminer la formule du terme général (w_n).

3. Trouver la somme des 5 premiers termes de la suite.

4. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Solution :

1. Les termes sont :

$$[w_1 = 4 + (1-1) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 4]$$

$$[w_2 = 4 + (2-1) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 4 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3}]$$

$$[w_3 = 4 + (3-1) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 4 + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{40}{9}]$$

$$[w_4 = 4 + (4-1)\cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 4 + 6 \cdot \frac{1}{27} = \frac{118}{27}]$$

2. La formule du terme général est :

$$[w_n = 4 + (n-1)\cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}]$$

3. La somme des 5 premiers termes est :

$$[S_5 = \sum_{n=1}^{5} \left[4 + (n-1)\cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]]$$

$$[S_5 = \sum_{n=1}^{5} 4 + \sum_{n=1}^{5} (n-1)\cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}]$$

$$[S_5 = 5 \cdot 4 + 2 \sum_{n=0}^{4} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n}]$$

Utilisons la formule pour la somme d'une série géométrique pondérée :

$$[\sum_{n=0}^{k} n \cdot q^n = \frac{q - (k+1)\cdot q^{k+1} + k \cdot q^{k+2}}{(1-q)^2}]$$

$$où(q = \frac{1}{3})et(k = 4):$$

$$[\sum_{n=0}^{4} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{3} - 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}]$$

$$[\sum_{n=0}^{4} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{243} + \frac{4}{729}}{\frac{4}{9}}]$$

$$[\sum_{n=0}^{4} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{\frac{243 - 5\cdot 9 + 4}{729}}{\frac{4}{9}} = \frac{\frac{234}{729}}{\frac{4}{9}} = \frac{234}{729}\cdot\frac{9}{4} = \frac{13}{8}]$$

Donc :

$[S_5 = 20 + 2 \cdot \frac{13}{8} = 20 + \frac{13}{4} = \frac{80+13}{4} = \frac{93}{4}]$

4. Convergence de la suite :

La suite (w_n) converge vers une limite (L) si le terme en $((n-1)\cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}) \textit{ tend vers zéro lorsque } (n)$