# Généralités sur les Fonctions

## 1. Définition d'une fonction

Une fonction f est une relation qui, à chaque élément x d'un ensemble $D_f$ (appelé domaine de définition), associe un unique élément f(x) d'un ensemble $F_f$ (appelé ensemble d'arrivée).

Notation : $f : x \mapsto f(x)$

Exemple : Soit la fonction $f : x \mapsto 2x + 3$. Ici, $f(x) = 2x + 3$.

## 2. Domaine de définition

Le domaine de définition $D_f$ est l'ensemble des réels x pour lesquels f(x) est défini.

Exemple : Pour $f(x) = 1/(x-2)$, f(x) est défini pour $x \neq 2$. Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

## 3. Image d'une fonction

L'image d'une fonction f, notée Im(f), est l'ensemble des valeurs que f(x) peut prendre lorsque x parcourt le domaine de définition.

Exemple : Pour $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, l'image est $Im(f) = [0, +\infty[$.

## 4. Types de fonctions

Fonction paire : f est paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Fonction impaire : f est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Fonction croissante/décroissante : f est croissante sur un intervalle I si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

## 5. Exemples corrigés

### Exemple 1 : $f(x) = x^2 - 4x + 5$

1. Déterminer le domaine de définition :

f(x) est un polynôme, donc défini sur $\mathbb{R}$. $D_f = \mathbb{R}$.

2. Étudier la parité de f(x) :

Calculons $f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 5 = x^2 + 4x + 5$.

Comme $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$, $f(x)$ n'est ni paire ni impaire.

3. Déterminer l'image de $f(x)$ :

$f(x) = (x-2)^2 + 1$, donc $f(x) \geq 1$.

L'image est $Im(f) = [1, +\infty[$.

## Exemple 2: g(x) = (2x + 1)/(x - 3)

1. Déterminer le domaine de définition :

$g(x)$ est défini pour $x \neq 3$. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2. Calculer l'image pour $x = 0$ et $x = 4$ :

$g(0) = 1/(-3) = -1/3$.

$g(4) = 9$.

3. Étudier la monotonie sur $]-\infty, 3[$ et $]3, +\infty[$ :

$g'(x) = -7/(x-3)^2$ donc $g(x)$ est décroissante sur $]-\infty, 3[$ et $]3, +\infty[$.