Le Produit Scalaire et Ses Applications

1. Définition du produit scalaire

Le produit scalaire, ou produit intérieur, de deux vecteurs $(\vec{u})\ et\ (\vec{v})$ dans un espace euclidien est défini par :

$$[\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta]$$

Où (θ) est l'angle entre les vecteurs $(\vec{u}) et (\vec{v}), et (|\vec{u}|) et (|$ $\vec{}\{v\}$ |) sont les normes des vecteurs.

En coordonnées cartésiennes, $si (\vec{u} = (u_1, u_2)) et (\vec{v} = (v_1, v_2)), alors$:

$$[\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2]$$

2. Propriétés du produit scalaire

- Commutativité : $(\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u})$

- Distributivité : $(\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w})$

- Associativité avec les réels : $(a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v})\ pour\ tout\ scalaire\ (a)$

- Produit scalaire de vecteurs perpendiculaires : $(\vec{u} \cdot \vec{v} = 0) si (\vec{u}) et (\vec{v})$ sont orthogonaux.

3. Applications du produit scalaire

- Calcul de l'angle entre deux vecteurs :

$$[\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}]$$

- Projection d'un vecteur sur un autre

$$[\text{Proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}]$$

- Vérification de l'orthogonalité : Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Exemple 1 :

Calculer le produit scalaire de $(\vec{u} = (1,3))\ et\ (\vec{v} = (4, -2))$.

$$[\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 4 - 6 = -2]$$

Exemple 2 :

Déterminer l'angle entre les vecteurs$(\vec{a} = (2,1))\ et\ (\vec{b} = (-1,3))$.

D'abord, calculons le produit scalaire :

$$[\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -2 + 3 = 1]$$

Calculons les normes des vecteurs :

$$[|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}]$$

$$[|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}]$$

Ainsi :

$$[\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}]$$

L'angle (θ) est donc :

$$[\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)]$$