Exercice 1

Équation : Résoudre ($\ln(x) = 2$)

Correction

1. Transformer en exponentielle :

$$x = e^2$$

2. Vérification du domaine :

- ($e^2 > 0$), donc la solution est valide.

Solution : ($x = e^2$)

Exercice 2

Fonction : Étudier la fonction ($f(x) = \ln(3x - 2)$)

Correction

Étape 1 : Domaine de définition

$$-(3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3})$$

$$-Domaine: (x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right))$$

Étape 2 : Dérivée

$$f'(x) = \frac{3}{3x - 2}$$

$$-(f'(x) > 0) pour (x > \frac{2}{3}) (fonction croissante).$$

Étape 3 : Limites

$$-(\lim_{x \to \frac{2}{3}^+} f(x) = \ln(0) = -\infty)$$

$$-(\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty)$$

Étape 4 : Graphe

- La fonction est croissante à partir de ($x = \frac{2}{3}$).

Exercice 3

Équation : Résoudre ($\ln(2x + 1) = 0$)

Correction

1. Transformer en exponentielle :

$$2x + 1 = e^0 = 1$$

2. Résoudre l'équation :

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

3. Vérification du domaine :

- $(2(0) + 1 = 1 > 0)$, solution valide.

Solution : ($x = 0$)

Exercice 4 :

Problème : Soit la fonction $(f(x) = \ln(x) + \ln(5 - x))$ définie pour $(x \in (0,5))$.

Tâches :

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Calculer la dérivée de $\big(f(x)\big)$.
3. Trouver les points critiques.
4. Étudier la monotonie de $(f(x))$.
5. Déterminer les valeurs aux points critiques.
6. Conclure sur le maximum de $(f(x))$.

Correction

Étape 1 : Domaine de définition

$-(f(x))$ Est définie si ($x > 0$) et ($5 - x > 0$).

- Donc, $(x \in (0,5))$.

Étape 2 : Calcul de la dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{5 - x}$$

Étape 3 : Trouver les points critiques

1. Égaliser la dérivée à zéro :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{5 - x} = 0$$

2. Résoudre :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5 - x} \Rightarrow 5 - x = x \Rightarrow 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Étape 4 : Étudier la monotonie

1. Domaine de $(f'(x))$: $(x \in (0,5))$.

2. Signe de $(f'(x))$:

- Pour $(x < \frac{5}{2})$, $(f'(x) > 0)$ (croissante).

- Pour $(x > \frac{5}{2})$, $(f'(x) < 0)$ (décroissante).

Étape 5 : Valeurs aux points critiques

1. Calculer $(f\left(\frac{5}{2}\right))$:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) + \ln\left(5 - \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) + \ln\left(\frac{5}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

Étape 6 : Conclusion

- La fonction$(f(x))$atteint un maximum en $(x = \frac{5}{2})$.

- Le maximum est $(f\left(\frac{5}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{5}{2}\right))$.