# Les Fonctions Logarithmiques

## 1. Définition de la Fonction Logarithmique

La fonction logarithmique est définie comme suit :

### 1.1. Fonction Logarithme Naturel

Pour tout ( $x > 0$ ), le logarithme naturel est défini par :

$$y = \ln(x)$$

Il s'agit de l'inverse de la fonction exponentielle ($y = e^x$).

### 1.2. Propriétés du Logarithme

- Domaine de définition : ($\ln(x)$)est défini pour ( $x > 0$ ).

- Croissance : La fonction ($\ln(x)$) est croissante sur ($(0, +\infty)$).

- Limites :

$$\text{- } (\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty)$$

$$-(\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty)$$

### 2. Propriétés et Règles du Logarithme

1. Produit :

$$ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

2. Quotient :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

3. Puissance :

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$$

### 2.2. Dérivée de la Fonction Logarithmique

La dérivée de ($\ln(x)$) est donnée par :

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

#### 3. Exemples Corrigés

**Exemple 1** : Étude de la Fonction ($f(x) = \ln(x)$)

Étape 1 : Domaine de définition

- $f(x)$ est définie pour ( $x > 0$ ).

Étape 2 : Dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$-(f'(x) > 0) pour (x > 0)$ (Fonction croissante).

Étape 3 : Limites

$$-( \lim_{x \to 0^+} f\,(x) = -\infty)$$

$$-( \lim_{x \to +\infty} f\,(x) = +\infty)$$

Étape 4 : Graphe

- La fonction $(f(x) = \ln(x))$ passe par le point $((1,0))$ et augmente indéfiniment

**Exemple 2** : Étude de la Fonction $(g(x) = \ln(2x + 1))$

Étape 1 : Domaine de définition

$$-(2x + 1 > 0 \Rightarrow x \succ \frac{1}{2})$$

- Domaine : $(x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right))$.

Étape 2 : Dérivée

$$g'(x) = \frac{2}{2x + 1}$$

$-(g'(x) > 0) pour (x \succ \frac{1}{2})$ (fonction croissante).

Étape 3 : Limites

$$-( \lim_{x \to -\frac{1}{2}} g\,(x) = \ln(0) = -\infty)$$

$$-( \lim_{x \to +\infty} g\,(x) = +\infty)$$

Étape 4 : Valeur au point critique

$$-\ (\ \mathrm{g}\left(-\frac{1}{2}\right)\ =\ \ln(0)\ )\ (\text{non dé}fini).$$

Étape 5 : Graphe

- La fonction est croissante à partir de $(x = -\frac{1}{2})$.

**Exemple 3** : Résolution d'Équation Logarithmique

Équation : $(\ln(x) = 1)$

Étapes de résolution

1. Transformer en exponentielle :

$$x = e^1 = e$$

2. Vérifier le domaine :

- ( $e > 0$ ) donc solution valide.

Conclusion

La solution de $(\ln(x) = 1)\ est\ (x = e)$.