Les Limites d'une Fonction

1. Définition des Limites

1.1 Limite en un Point

Soit $(f(x))$ une fonction définie sur un intervalle contenant $(\ a\ )$, sauf peut-être en $(\ a\ )$. On dit que $(\lim_{x \to a} f\ (x) = L)\ si\ pour\ chaque\ (\epsilon > 0), il\ existe\ un\ (\delta > 0)\ telque\ si\ (0 < |x - a| < \delta), alors\ (|f(x) - L| < \epsilon)$.

1.2 Limite à Gauche et Limite à Droite

- La limite de$(f(x))$ en $(\ a\ )$ par la gauche est $(\lim_{x \to a^-} f\ (x)), si(\lim_{x \to a^-} f\ (x) = L\ )\ signifie\ que\ pour\ chaque\ (\epsilon > 0), il\ existe\ (\delta > 0)\ telque\ si\ (a - \delta < x < a), alors\ (|f(x) - L| < \epsilon)$.

- La limite de $(f(x))$ en $(\ a\ )$ par la droite est $(\lim_{x \to a^+} f\ (x)), si(\lim_{x \to a^+} f\ (x) = L) signifie\ que\ pour\ chaque\ (\epsilon > 0), il\ existe\ (\delta > 0)\ telque\ si\ (a < x < a + \delta), alors\ (|f(x) - L| < \epsilon)$.

1.3 Limite en l'Infini

On dit que $(\lim_{x \to +\infty} f\ (x) = L) si\ pour\ chaque\ (\epsilon > 0), il\ existe\ un\ (M > 0)\ telque\ si\ (x > M), alors\ (|f(x) - L| < \epsilon)$.

1.4 Limite Infinie

On dit que $(\lim_{x \to a} f\ (x) = +\infty) si\ pour\ chaque\ (M > 0), il\ existe\ un\ (\delta > 0)\ telque\ si\ (0 < |x - a| < \delta), alors (f(x) > M)$.

2. Propriétés des Limites

2.1 Limite de la Somme

Si $(\lim_{x \to a} f\ (x) = L_1) et (\lim_{x \to a} g\ (x) = L_2)$,

Alors $[\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2.]$

2.2 Limite du Produit

Si $(\lim_{x \to a} f\ (x) = L_1) et (\lim_{x \to a} g\ (x) = L_2)$,

Alors $[\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2.]$

2.3 Limite du Quotient

Si $(\lim_{x \to a} f\ (x) = L_1) et (\lim_{x \to a} g\ (x) = L_2) et (L_2 \neq 0)$, Alors $[\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.]$

Exemple 1

Trouver la limite suivante :

$$[\lim_{x\to 2}(3x-5)\,.]$$

Solution :

$$\lim_{x\to 2}(3x-5) = 3\cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1.$$

Exemple 2

Trouver la limite suivante :

$$[\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}.]$$

Solution :

On factorise le numérateur :

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6.$$

Exemple 3

Trouver la limite suivante :

$$[\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2+3}{2x^2-x}.]$$

Solution :

On divise le numérateur et le dénominateur par (x^2):

$$\frac{5x^2+3}{2x^2-x} = \frac{5+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{1}{x}}.$$

Quand $(x \to +\infty), les\ termes\ (\frac{3}{x^2}) et (\frac{1}{x})$tendent vers 0 :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2+3}{2x^2-x} = \frac{5+0}{2-0} = \frac{5}{2}.$$