Les Nombres Complexes

1. Définition des Nombres Complexes

Un nombre complexe (z) est défini comme :

$$z = a + bi$$

Où (a) et (b) sont des réels, et (i) est l'unité imaginaire avec($i^2 = -1$).

1.1. Partie Réelle et Partie Imaginaire

- La partie réelle de (z) *est* $\mathrm{Re}\,(z) = a$.

- La partie imaginaire de (z) *est* $\mathrm{Im}\,(z) = b$.

2. Représentation Géométrique

Les nombres complexes peuvent être représentés dans le plan complexe :

- L'axe horizontal représente la partie réelle.

- L'axe vertical représente la partie imaginaire.

2.1. Module et Argument

- Le module d'un nombre complexe (z) est donné par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- L'argument (angle) θ est donné par :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

3. Opérations sur les Nombres Complexes

3.1. Addition

Pour deux nombres complexes $(z_1 = a + bi) et (z_2 = c + di)$:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

3.2. Soustraction

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

3.3. Multiplication

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

3.4. Division

Pour diviser (z_1) *par* (z_2) $(avec(z_2 \neq 0))$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

4. Exemples Corrigés

Exemple 1 : Addition de Nombres Complexes

Problème : Calculer $(z_1 + z_2)$ $avec$ $(z_1 = 3 + 4i)$ et $(z_2 = 1 - 2i)$.

Correction

$$z_1 + z_2 = (3+1) + (4-2)i = 4 + 2i$$

Exemple 2 : Multiplication de Nombres Complexes

Problème : Calculer $(z_1 \cdot z_2)$ $avec$ $(z_1 = 2 + 3i)$ et $(z_2 = 1 + 4i)$.

Correction

$$z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 4) + (2 \cdot 4 + 3 \cdot 1)i = (2 - 12) + (8 + 3)i = -10 + 11i$$

Exemple 3 : Division de Nombres Complexes

Problème : Calculer $(\frac{z_1}{z_2})$ $avec$ $(z_1 = 3 + 2i)$ et $(z_2 = 1 + i)$.

Correction

1. Multiplier par le conjugué :

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(3-3i+2i+2)}{1+1} = \frac{(5-i)}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$

Exemple 4 : Module et Argument

Problème : Trouver le module et l'argument de $(z = 1 + \sqrt{3}i)$.

Correction

1. Module :

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

2. Argument :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$