# Les Nombres Complexes en Forme Trigonométrique et Exponentielle

## I. Introduction aux Nombres Complexes

Un nombre complexe est de la forme :

$$[\, z = a + bi \,]$$

Où :

- ( $a$ ) est la partie réelle,

- ( $b$ ) est la partie imaginaire,

$-$ ( $i$ ) Est l'unité imaginaire avec ($i^2 = -1$).

## II. Forme Trigonométrique

Un nombre complexe peut aussi s'exprimer en forme trigonométrique :

$$[z = r(\cos\theta + i\sin\theta)]$$

Où :

$$-(r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2})(modulede(z)),$$

$$-(\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right))(argumentde(z)).$$

**Exemple 1**

Soit ( $z = 3 + 4i$ ).

1. Calculons le module :

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

2. Calculons l'argument :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.93 \text{ radians}$$

3. Forme trigonométrique :

$$z = 5(\cos(0.93) + i\sin(0.93))$$

## III. Forme Exponentielle

La forme exponentielle des nombres complexes est donnée par :

$$[z = re^{i\theta}]$$

### Exemple 2

Prenons le même ( $z = 3 + 4i$ ).

1. Nous avons déjà ( $r = 5$ ) $et$ ( $\theta \approx 0.93$ ).

2. La forme exponentielle est :

$$z = 5e^{i\cdot 0.93}$$

## IV. Propriétés

1. Multiplication :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

2. Division :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

### Exemple 3

Soit $(z_1 = 2 + 2i)et(z_2 = 1 + i)$.

1. Formes trigonométriques :

$$-(z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})$$

$$-(z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})$$

2. Multiplication :

$$z_1 z_2 = \left(2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i$$

3. Division :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i(0)} = 2$$

### Exercices

1. Trouvez la forme trigonométrique et exponentielle de $(z = -1 + i\sqrt{3})$.

2. Calculez $(z_1 z_2)et(\frac{z_1}{z_2})pour(z_1 = 1 + i)et(z_2 = 1 - i)$.

### Corrections des Exercices

Trouver la forme trigonométrique et exponentielle de $(z = -1 + i\sqrt{3})$.

1. Calcul du module ( $r$ ) :

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

2. Calcul de l'argument ( $\theta$ ) :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

3. Forme trigonométrique :

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

4. Forme exponentielle :

$$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Calculer $(z_1z_2)$ $et$ $(\frac{z_1}{z_2})$ $pour$ $(z_1 = 1 + i)$ $et$ $(z_2 = 1 - i)$

1. Formes trigonométriques :

- Pour $(z_1)$ :

$$-(r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2})$$

$$-(\theta_1 = \frac{\pi}{4})$$

$$-Donc, (z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}).$$

- Pour $(z_2)$ :

$$-(r_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2})$$

$$-(\theta_2 = -\frac{\pi}{4})$$

$$-Donc, (z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}).$$

2. Multiplication $(z_1z_2)$ :

$$z_1z_2 = (\sqrt{2})(\sqrt{2})e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i(0)} = 2$$

3. Division $(\frac{z_1}{z_2})$ :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

# V. Équation du 2ème Degré

### Forme Générale

Une équation du 2ème degré dans les nombres complexes s'écrit :

$$[ax^2 + bx + c = 0]$$

$$où\ (a, b, c \in C)\ et\ (a \neq 0).$$

### Résolution de l'Équation

Le discriminant ( $D$ ) est donné par :

$$D = b^2 - 4ac$$

Cas du Discriminant :

1. Si ( $D > 0$ ) : Deux solutions complexes distinctes.
2. Si ( $D = 0$ ) : Une solution réelle double (ou complexe).
3. Si ( $D < 0$ ) : Deux solutions complexes conjuguées.

Formule de Résolution :

Les solutions sont données par la formule :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$où$ ($\sqrt{D}$) Peut être un nombre complexe.

### Exemple

Résolvons l'équation suivante :

$$[x^2 + 2x + 5 = 0]$$

1. Calcul du discriminant :

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

2. Solutions :

Puisque ( $D < 0$ ), nous avons des solutions complexes :

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Résultats

Les solutions de l'équation ($x^2 + 2x + 5 = 0$) sont :

$$x_1 = -1 + 2i, \quad x_2 = -1 - 2i$$