Limites et continuités

I. Limites

1- Définition de la limite :

- La limite d'une fonction $f(x)$lorsque x approche a est la valeur que $f(x)$ tend à atteindre lorsque x se rapproche de a .

2- Notation :

- On écrit $(\lim_{x\to a} f(x) = L) si (f(x)) tend vers (L) lorsque (x) approche (a)$.

3-Limites infinies :

- On dit que $(\lim_{x\to a} f(x) = +\infty)$

$$si\ f(x)\ augmente\ sans\ borne\ lors\ que\ (x)\ approche\ (a).$$

4-Règles de calcul des limites :

$$-Si(\lim_{x\to a} f(x) = L)\ et\ (\lim_{x\to a} g(x) = M), alors:$$

$$-(\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = L + M)$$

$$-(\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = L \cdot M)$$

$$-(\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M})(si(M \neq 0))$$

II. Continuité

1-Définition de la continuité :

$$-\ Une\ fonction\ (\ f\ )\ est\ continue\ en\ (\ a\ )\ si\ :$$

$$1. (f(a)\ est\ défini.$$

$$2. \lim_{x\to a} f(x)\ existe.$$

$$3.\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

2-Types de discontinuités :

- Discontinuité évitable : La limite existe mais n'est pas égale à $f(a)$.

- Discontinuité de saut : La limite à gauche et à droite ne sont pas égales.

- Discontinuité infinie :$(\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty)$.

Exemples

$$-(\lim_{x\to 2}(3x^2 + 2) = 3(2^2) + 2 = 14)$$

2. Fonction continue :

$$-(f(x) = x^2)\ est\ continue\ pour\ tout(x).$$

3. Discontinuité évitable :

$$-f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}\ \ pour\ (x \neq 1)\ a\ une\ discontinuitéen\ (x = 1)\ .$$

Exercices

$$1. Calculez(\lim_{x\to 3}(x^2 - 9)).$$

$$2. Vérifiez\ la\ continuité\ de\ (f(x) = \sqrt{x})\ en\ x = 0$$

Correction

$$1 - Expression\ à\ évaluer\ :$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - 9)$$

$$-\ Remplaçons\ (\ x\ )\ par\ 3\ :$$

$$3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

$$2 - Vérifiez\ la\ continuité\ de\ (f(x) = \sqrt{x}\ )\ en\ (x = 0).$$

$$1 - Déterminer\ \ (f(0))$$

$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$

2-Calculer la limite à gauche et à droite :

- Limite à gauche :

$$\lim_{x\to 0^-} f\ (x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} \quad \text{(non défini pour } x < 0)$$

- Limite à droite :

$$\lim_{x\to 0^+} f\ (x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

3-Conclusion :

- La limite à gauche n'est pas définie, donc la fonction n'est pas continue en ($x\ =\ 0$).

$$La\ fonction\ (f(x) = \sqrt{x})\ n'est\ pas\ continue\ en\ (x = 0)\ car\ la\ limite\ à\ gauche\ n'existe\ pas$$

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 9) = 0$$

$$La\ limite\ est\ (\ 0\ ).$$

III. Discontinuité

Une discontinuité de saut se produit lorsque la limite de la fonction à gauche d'un point \(a \) est différente de la limite à droite de ce point. Autrement dit, la fonction "saute" d'une valeur à une autre.

Exemple

-Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = 2\ si\ x < 1$$
$$5\ si\ x \geq 1$$

- Analyse de la discontinuité

1. Limite à gauche :

$$-(\lim_{x \to 1^-} f\ (x) = 2)(car\ pour\ (x < 1), (f(x) = 2))$$

2. Limite à droite:

$$-(\lim_{x \to 1^+} f\ (x) = 5)(car\ pour\ (x \geq 1), (f(x) = 5))$$

3. Valeur de la fonction en ($x\ =\ 1$) :

$$-(f(1) = 5)$$

Conclusion

- Puisque ($\lim_{x \to 1^-} f\ (x) = 2)\ et\ (\lim_{x \to 1^+} f\ (x) = 5)$, et que ces deux limites ne sont pas égales, la fonction présente une discontinuité de saut en ($x\ =\ 1$).

-Si vous tracez cette fonction, vous verrez un saut entre les valeurs 2 et 5 au point ($x\ =\ 1$).