

Logique Mathématique

Introduction

La logique mathématique est une branche des mathématiques qui étudie les formes de raisonnement et les règles de déduction. Elle repose sur des propositions, qui sont des phrases déclaratives pouvant être vraies ou fausses.

1. Propositions

Une proposition est une phrase qui a une valeur de vérité, soit vraie (V), soit fausse (F).

Exemples :

" $2 + 2 = 4$ " est une proposition vraie (V).

"Le ciel est vert" est une proposition fausse (F).

2. Opérateurs Logiques

Les opérateurs logiques permettent de combiner ou de modifier des propositions pour en créer de nouvelles.

Négation (\neg) : Inverse la valeur de vérité d'une proposition.

- Si P est vrai, alors $\neg P$ est faux.

- Si P est faux, alors $\neg P$ est vrai.

Exemple :

P : "Il pleut." (F)

$\neg P$: "Il ne pleut pas." (V)

Conjonction (\wedge) : Combine deux propositions qui sont vraies simultanément.

- $P \wedge Q$ est vrai seulement si P et Q sont tous deux vrais.

Exemple :

P : "Il pleut." (V)

Q : "Le sol est mouillé." (V)

$P \wedge Q$: "Il pleut et le sol est mouillé." (V)

Disjonction (\vee) : Combine deux propositions où au moins l'une est vraie.

- $P \vee Q$ est vrai si P ou Q ou les deux sont vrais.

Exemple :

P : "Il pleut." (V)

Q : "Le sol est sec." (F)

$P \vee Q$: "Il pleut ou le sol est sec." (V)

Implication (\rightarrow) : Exprime qu'une proposition P implique une autre proposition Q.
- $P \rightarrow Q$ est faux seulement si P est vrai et Q est faux.

Exemple :

P : "Il pleut." (V)

Q : "Le sol est mouillé." (V)

$P \rightarrow Q$: "Si il pleut, alors le sol est mouillé." (V)

3. Tables de Vérité

Les tables de vérité permettent de déterminer la valeur de vérité d'une proposition complexe en fonction des valeurs de vérité des propositions simples.

Exemple :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples Corrigés

Exemple 1 : Négation

Étant donné P : "Le nombre 5 est pair."

- P est faux (F).

- $\neg P$: "Le nombre 5 n'est pas pair." est vrai (V).

Exemple 2 : Conjonction

Étant donné P : "Le ciel est bleu." et Q : "La mer est salée."

- $P \wedge Q$: "Le ciel est bleu et la mer est salée." est vrai (V) car les deux propositions sont vraies.

Exemple 3 : Implication

Étant donné P : "Le soleil brille." et Q : "Il fait jour."

- $P \rightarrow Q$: "Si le soleil brille, alors il fait jour." est vrai (V), car la lumière du soleil implique qu'il fait jour.