La Rotation dans le Plan

Introduction à la Rotation

La rotation est une transformation géométrique qui fait tourner une figure autour d'un point fixe, appelé centre de rotation, d'un certain angle. La rotation préserve la forme et la taille des figures, ainsi que les angles.

1. Définition de la Rotation

Une rotation de centre O et d'angle θ est une transformation qui, à tout point M du plan, associe un point M' tel que :
- OM = OM' (conservation de la distance),
- L'angle (OM, OM') = θ dans le sens direct (sens anti-horaire).

2. Propriétés de la Rotation

- Conservation des distances : Une rotation conserve la longueur des segments. Si M' est l'image de M par une rotation de centre O, alors OM = OM'.
- Conservation des angles : Une rotation conserve les mesures des angles.
- Orientation : Une rotation ne modifie pas l'orientation de la figure.

3. Rotation et Coordonnées

Pour un point M(x, y) dans le plan et une rotation de centre O (souvent pris comme l'origine (0, 0)) et d'angle θ, les coordonnées du point M'(x', y') après rotation sont données par les formules :
$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$
$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$

4. Exemples Corrigés

Exemple 1 :

Trouver les coordonnées du point M' après une rotation de 90° autour de l'origine pour M(1, 2).

Solution :

Pour une rotation de 90°, θ = 90°, donc cos(90°) = 0 et sin(90°) = 1.
$x' = 1 \times 0 - 2 \times 1 = -2$
$y' = 1 \times 1 + 2 \times 0 = 1$
Les coordonnées du point M' sont (-2, 1).

Exemple 2 :

Déterminer l'image du point P(3, 4) par une rotation de 180° autour de l'origine.

Solution :

Pour une rotation de 180°, θ = 180°, donc cos(180°) = -1 et sin(180°) = 0.
$x' = 3 \times (-1) - 4 \times 0 = -3$

$y' = 3 \times 0 + 4 \times (-1) = -4$
Les coordonnées du point P' sont (-3, -4).