Calcul Vectoriel dans le Plan

1. Introduction :

Le calcul vectoriel est une branche des mathématiques qui s'occupe des vecteurs, leurs opérations et leurs applications dans le plan. Un vecteur est une entité mathématique qui possède à la fois une magnitude (longueur) et une direction.

2. Définition d'un Vecteur :

En géométrie dans le plan, un vecteur est défini par ses coordonnées. Si $(\mathbf{u})$ est un vecteur avec une origine en $((x_1, y_1))$ et une extrémité en $((x_2, y_2))$, on peut le noter $(\mathbf{u} = (x_2 - x_1 y_2 - y_1))$.

3. Opérations sur les Vecteurs

3.1. Addition de Vecteurs :

Pour ajouter deux vecteurs $(\mathbf{u} = (u_1 u_2))$ et $(\mathbf{v} = (v_1 v_2))$, on utilise la règle du parallélogramme :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1 u_2 + v_2)$$

3.2. Soustraction de Vecteurs :

Pour soustraire un vecteur $(\mathbf{v})$ du vecteur $(\mathbf{u})$:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1 u_2 - v_2)$$

3.3. Multiplication par un Scalaire :

Pour multiplier un vecteur $(\mathbf{u} = (u_1 u_2))\ par\ un\ scalaire\ (k)$:

$$k\mathbf{u} = (ku_1 ku_2)$$

4. Norme d'un Vecteur :

La norme (ou longueur) d'un vecteur $(\mathbf{u} = (u_1 u_2))$ est donnée par :

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

5. Produit Scalaire :

Le produit scalaire de deux vecteurs $(\mathbf{u} = (u_1 u_2))et(\mathbf{v} = (v_1 v_2))$ est :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

6. Exemples Corrigés :

Exemple 1 :

Addition de Vecteurs

Soit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Solution :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 + (-1) \\ 4 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

Soustraction de Vecteurs

Soit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$. Calcule $\|\mathbf{v}\|$.

Solution :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Exemple 3 :

Produit Scalaire

Soit $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$.

Solution :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) = 3 - 8 = -5$$

Exemple 4 :

Norme d'un Vecteur

Soit $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Solution :

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ -3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$