

Cours sur les Polynômes

1. Définition d'un polynôme

Un polynôme est une expression algébrique formée par la somme de plusieurs monômes, qui sont des produits de constantes et de puissances entières non négatives d'une ou plusieurs variables. Un polynôme en une variable x est généralement écrit sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

où n est un entier naturel, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des coefficients réels ou complexes, et $a_n \neq 0$.

- a_n est le coefficient dominant.
- a_0 est le terme constant.
- n est le degré du polynôme, qui est la plus grande puissance de x ayant un coefficient non nul.

2. Opérations sur les polynômes

- Addition et soustraction : Pour additionner ou soustraire des polynômes, on combine les termes similaires (ceux ayant la même puissance de x).
- Multiplication : Pour multiplier deux polynômes, on multiplie chaque terme du premier polynôme par chaque terme du second polynôme et on combine les termes similaires.
- Division : La division d'un polynôme $P(x)$ par un autre polynôme $D(x)$ (non nul) peut être effectuée à l'aide de la méthode de la division euclidienne des polynômes.

3. Racines et factorisation

- Une racine d'un polynôme $P(x)$ est un nombre r tel que $P(r) = 0$.
- Un polynôme peut être factorisé en produit de polynômes de degré inférieur, souvent pour trouver ses racines.

4. Formes remarquables

Certaines formes de polynômes sont connues pour leurs propriétés particulières, comme :

$$-(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$-(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$-a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Exemples corrigés

Exemple 1 : Addition de polynômes

Additionner les polynômes $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$ et $Q(x) = x^2 - 4x + 5$.

Solution :

$$\begin{aligned}P(x) + Q(x) &= (3x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 4x + 5) \\&= (3x^2 + x^2) + (2x - 4x) + (1 + 5) \\&= 4x^2 - 2x + 6\end{aligned}$$

Exemple 2 : Multiplication de polynômes

Multiplier les polynômes $P(x) = x + 2$ et $Q(x) = x - 3$.

Solution :

$$\begin{aligned}P(x) * Q(x) &= (x + 2)(x - 3) \\&= x(x - 3) + 2(x - 3) \\&= x^2 - 3x + 2x - 6 \\&= x^2 - x - 6\end{aligned}$$

Exemple 3 : Racines et factorisation

Trouver les racines et factoriser le polynôme $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

Solution :

On cherche les valeurs de x telles que $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Facteur du polynôme :

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Les racines sont donc $x = 2$ et $x = 3$.

Exercices corrigés

Exercice 1 : Soustraction de polynômes

Soustraire le polynôme $Q(x) = 2x^3 - x + 4$ du polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$.

Correction :

$$\begin{aligned}P(x) - Q(x) &= (x^3 + x^2 - 3x + 1) - (2x^3 - x + 4) \\&= x^3 - 2x^3 + x^2 - 3x + x + 1 - 4 \\&= -x^3 + x^2 - 2x - 3\end{aligned}$$

Exercice 2 : Division de polynômes

Diviser le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 2$ par $D(x) = x - 1$.

Correction :

On effectue la division polynomiale :

1. Diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur : $(2x^3 / x = 2x^2)$.

2. Multiplier $D(x)$ par $2x^2$: $2x^2(x - 1) = 2x^3 - 2x^2$.

3. Soustraire de $P(x)$: $(2x^3 + 3x^2 - x - 2) - (2x^3 - 2x^2) = 5x^2 - x - 2$.

4. Répéter le processus jusqu'à obtenir un reste de degré inférieur à celui de $D(x)$.
Le quotient est $2x^2 + 5x + 4$ et le reste est 2.