Droites remarquables dans un triangle

Un triangle possède plusieurs types de droites remarquables. Voici les principales :

1. La Médiane

Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Propriété :

Les trois médianes d’un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité ou centre de masse. Ce point divise chaque médiane en deux segments, l’un deux fois plus long que l’autre.

2. La Hauteur

Une hauteur d’un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé (ou à son prolongement).

Propriété :

Les trois hauteurs d’un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre.

3. La Bissectrice

Une bissectrice d’un triangle est une droite qui coupe un angle en deux angles égaux.

Propriété :

Les trois bissectrices d’un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle inscrit, qui est le centre du cercle tangent aux trois côtés du triangle.

4. La Médiatrice

Une médiatrice d’un triangle est une droite perpendiculaire à un côté et passant par son milieu.

Propriété :

Les trois médiatrices d’un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle circonscrit, qui est le centre du cercle passant par les trois sommets du triangle.

Exercice 1 : Calcul de la longueur d'une médiane

Dans un triangle $(ABC), (AB = 6 \ \ cm), (AC = 8 \ \ cm), et\ (BC = 10 \ \ cm)$. Trouve la longueur de la médiane issue de (A).

Solution :

La longueur de la médiane d'un triangle peut être calculée avec la formule suivante :

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$$

En remplaçant les valeurs :

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(6^2) + 2(8^2) - 10^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(36) + 2(64) - 100} = \frac{1}{2}\sqrt{72 + 128 - 100}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{100} = \frac{1}{2} \times 10 = 5\,cm$$

Exercice 2 : Point de concours des médianes

Dans un triangle (ABC), les médianes se coupent en un point (G). Si la longueur de la médiane $(AM)\ est\ de\ (9 \ \ cm)$, trouve la longueur de $(AG)\ et\ (GM)$.

Solution :

Le centre de gravité divise chaque médiane en deux segments dans un rapport de 2:1. Donc :

$$AG = \frac{2}{3} \times AM = \frac{2}{3} \times 9 = 6\,cm$$

$$GM = \frac{1}{3} \times AM = \frac{1}{3} \times 9 = 3\,cm$$

Exercice 3 : Intersection des bissectrices

Dans un triangle (ABC), les bissectrices des angles se coupent en un point (I). Si les angles $(A), (B)$, et (C) mesurent respectivement $(50°), (60°), et(70°)$, calcule les angles $(AI), (BI)$, et (CI) après division des angles par les bissectrices.

Solution :

Les bissectrices divisent chaque angle en deux parties égales. Donc :

$$\text{Angle } A = 50° \Rightarrow \text{Angle } AI = 25°$$

$$\text{Angle } B = 60° \Rightarrow \text{Angle } BI = 30°$$

$$\text{Angle } C = 70° \Rightarrow \text{Angle } CI = 35°$$