Équations et Inéquations Trigonométriques

1. Introduction aux Équations Trigonométriques

Les équations trigonométriques sont des équations qui impliquent des fonctions trigonométriques telles que $(\sin(x))$, $(\cos(x))$, $(\tan(x))$,etc. La résolution d'une équation trigonométrique consiste à trouver toutes les valeurs de \(x\) pour lesquelles l'équation est vraie.

Exemple simple :

Résoudre l'équation $(\sin(x) = \frac{1}{2})$.

Solution :

1. **Identifier les valeurs fondamentales :** $si\,n(x) = 12\sin(x) = \frac{1}{2}sin(x) = 21$ correspond à des valeurs bien connues dans le cercle trigonométrique. Les angles qui vérifient cette équation sont $x = \pi 6x = \frac{\pi}{6}x = 6\pi etx = 5\pi 6x = \frac{5\pi}{6}x = 65\pi$.

2. **Généraliser pour toutes les périodes :** La fonction sinus est périodique avec une période de 2π2\pi2π, donc les solutions générales sont :

$$x = \pi 6 + 2k\pi etx = 5\pi 6 + 2k\pi, ou\grave{}k \in Z.x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{et} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{où} \quad k \in Z.x = 6\pi + 2k\pi etx = 65\pi + 2k\pi, ou\grave{}k \in Z.$$

2. Méthodes de Résolution des Équations Trigonométriques

2.1. Utilisation des valeurs fondamentales

Pour certaines valeurs fondamentales de \(\sin(x)\), \(\cos(x)\), et \(\tan(x)\), les solutions sont bien connues :

$$-(\sin(x) = \frac{1}{2}): (x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi)\ ou\ (x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi), \text{où}\ (k \in Z).$$

$$-(\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}): (x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)\ ou\ (x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi), \text{où}\ (k \in Z).$$

$$-(\tan(x) = 1): (x = \frac{\pi}{4} + k\pi), \text{où}\ (k \in Z).$$

2.2. Utilisation des identités trigonométriques

Les identités trigonométriques peuvent être utilisées pour transformer une équation en une forme plus simple :

- Identité de Pythagore : $(\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1)$.

- Identité de l'addition : $(\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))$.

- Identité de l'angle double : $(\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x))$.

Exemple corrigé :

Résoudre l'équation $(\sin(2x) = \cos(x))$.

Solution :

Utilisons l'identité $(\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x))$:

$$2\sin(x)\cos(x) = \cos(x)$$

Si $(\cos(x) \neq 0)$, nous pouvons diviser par $(\cos(x))$ des deux côtés :

$$2\sin(x) = 1 \ \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}$$

Les solutions sont donc $(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi)\ et\ (\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi). Si\ (\cos(x) = 0), alors\ (x = \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

Ainsi, les solutions complètes sont :

$$(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi), (x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi), et\ (x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ )\ pour\ (k \in Z).$$

3. Introduction aux Inéquations Trigonométriques

Les inéquations trigonométriques impliquent des inégalités entre des fonctions trigonométriques. La résolution d'une inéquation trigonométrique consiste à trouver l'ensemble des valeurs de \(x\) pour lesquelles l'inégalité est vraie.

Exemple simple :

Résoudre l'inéquation $(\sin(x) > \frac{1}{2})$.

4. Méthodes de Résolution des Inéquations Trigonométriques

4.1. Analyse des signes

Il est essentiel de connaître les intervalles où les fonctions trigonométriques sont positives ou négatives :

$-(\sin(x))$ est positif sur $([0, \pi])$ et négatif sur $([\pi, 2\pi])$.

- $(\cos(x))\ est\ positif\ sur\ (\left[0, \frac{\pi}{2}\right])\ et\ (\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]), et\ négatif sur\ (\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right])$.

-$(\tan(x))\ est\ positif\ sur(\left(0, \frac{\pi}{2}\right))et(\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)), et\ négatif sur(\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right))\ et\ (\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right))$.

4.2. Utilisation des graphiques

Tracer les fonctions trigonométriques permet de visualiser les solutions des inéquations.

Exemple corrigé :

Résoudre l'inéquation $(\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Solution :

Nous savons que $(\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2})\ pour\ (x = \frac{5\pi}{6})\ et\ (x = \frac{7\pi}{6})$.

La fonction $(\cos(x))$est négative et décroissante sur l'intervalle $(\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right])$.Donc, $(\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2})\ pour\ (x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] + 2k\pi), où\ (k \in Z)$.

Exercice Pratique :

1-Résoudre l'équation $(\cos(2x) = \sin(x))$.

2- Résoudre l'inéquation $(\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2})$.

3- Résoudre l'équation $(\tan(x) = -1)$.

4- Résoudre l'inéquation $(\cos(x) < 0)$.

Correction de Exercice :

1 : Résoudre l'équation $(\cos(2x) = \sin(x))$

1. Utiliser les identités trigonométriques :

On peut utiliser l'identité $(\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x))$.

L'équation devient :

$$1 - 2\sin^2(x) = \sin(x)$$

2. Réarranger l'équation :

On peut réarranger l'équation pour former une équation quadratique en $(\sin(x))$:

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

3. Résoudre l'équation quadratique :

Utilisons la formule quadratique $(\sin(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}), où(a = 2), (b = 1), et(c = -1)$.

$$\sin(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$\sin(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4}$$

$$\sin(x) = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

Nous obtenons deux solutions :

$\sin(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{-4}{4} = -1$

4. Trouver les solutions pour $(\sin(x) = \frac{1}{2})$:

$$(\sin(x) = \frac{1}{2})\ pour\ (x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi)\ et\ (x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi), où\ (k \in Z).$$

5. Trouver les solutions pour $(\sin(x) = -1)$:

$$(\sin(x) = -1)\ pour\ (x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi), où\ (k \in Z).$$

6. Combiner les solutions :

Les solutions de l'équation $(\cos(2x) = \sin(x))$sont donc :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{où} \quad k \in Z.$$

2 : Résoudre l'inéquation $(\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2})$

1. Déterminer les valeurs pour lesquelles $(\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2})$:

$$(\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2})\ pour\ (x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi)\ et\ (x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), où\ (k \in Z).$$

2. Déterminer l'intervalle où $(\sin(x))$ est supérieur ou égal à $(\frac{\sqrt{2}}{2})$:

La fonction $(\sin(x))$ est croissante sur l'intervalle $(\left[0, \frac{\pi}{2}\right])$ et décroissante sur $(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right])$. On recherche où $(\sin(x))$ est supérieur ou égal à $(\frac{\sqrt{2}}{2}), soit\ entre\ (\frac{\pi}{4})$ et $(\frac{3\pi}{4})$.

3. Écrire les solutions de l'inéquation :

Les solutions sont donc :

$$x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right], \quad \text{où} \quad k \in Z.$$

3 : Résoudre l'équation $(\tan(x) = -1)$

1. Déterminer les valeurs pour lesquelles$(\tan(x) = -1)$:

$(\tan(x) = -1)\ lorsque\ (x = -\frac{\pi}{4} + k\pi), où\ (k \in Z)$.

2. Écrire les solutions de l'équation :

Les solutions sont :

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{où} \quad k \in Z.$$

4 : Résoudre l'inéquation $(\cos(x) < 0)$

1. Analyser le signe de $(\cos(x))$:

$$(\cos(x)) est\ négatif sur l' intervalle\ (\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]), \text{où}\ (k \in Z).$$

2. Écrire les solutions de l'inéquation :

Les solutions sont :

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \quad \text{où} \quad k \in Z.$$