Exercice 1 :

Trouver le domaine de définition de la fonction suivante :

$$(f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}).$$

Correction :

- La fonction est une fraction rationnelle, elle est définie pour toutes les valeurs de (x) sauf celles qui annulent le dénominateur.

- Le dénominateur ($x - 2 = 0$) $lorsque$ ($x = 2$).

- Donc, le domaine de définition de (f) est $(R \setminus \{2\})$.

Exercice 2 :

Soit $(g(x) = x^2 - 5x + 6)$. Trouver l'image de ($x = 3$) et déterminer l'antécédent de ($y = 0$).

Correction :

- Image de ($x = 3$) :

$$(g(3) = 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0).$$

Donc, l'image de ($x = 3$) est (0).

- Antécédent de ($y = 0$) :

Pour trouver les antécédents de ($y = 0$), on résout l'équation $(x^2 - 5x + 6 = 0)$.

Cette équation se factorise en $((x - 2)(x - 3) = 0)$.

Donc, les solutions sont ($x = 2$) et ($x = 3$).

Ainsi, les antécédents de ($y = 0$) $sont$ (2) et (3).

Exercice 3 :

Représenter graphiquement la fonction $(h(x) = x^2 - 4x + 3)$ et déterminer ses points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Correction :

- Pour représenter graphiquement $(h(x) = x^2 - 4x + 3)$, nous cherchons d'abord les racines de l'équation $(x^2 - 4x + 3 = 0)$.

- Cette équation se factorise en $((x - 1)(x - 3) = 0)$, donc les racines sont ($x = 1$) et ($x = 3$).

- La parabole coupe l'axe des abscisses aux points $((1,0))$ et $((3,0))$.

- Le sommet de la parabole est à $(x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2\times1} = 2)$.

- Pour $(x = 2)$, $(h(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1)$.

- Donc, le sommet est le point $((2,-1))$, et la parabole a une forme ouverte vers le haut.

Exercice 4 :

Soit la fonction $(f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-x-6})$.

a. Déterminer le domaine de définition de (f).

b. Simplifier l'expression de $(f(x))$ lorsque c'est possible.

c. Trouver les asymptotes verticales et horizontales de (f).

d. Étudier les variations de (f).

e. Représenter graphiquement la fonction (f).

Correction :

a. Domaine de définition :

Le dénominateur$(x^2-x-6=(x-3)(x+2))$.

La fonction est définie pour $(x\in R\setminus\{3,-2\})$.

b. Simplification :

Le numérateur $(x^2-4=(x-2)(x+2))$.

La fonction se simplifie en $(f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x-2}{x-3})\ pour\ (x\neq -2)$.

Donc, $(f(x)=\frac{x-2}{x-3})\ avec\ (x\neq 3)\ et\ (x\neq -2)$.

c. Asymptotes :

- Asymptote verticale : ($x\ =\ 3$) (puisque le dénominateur s'annule et non le numérateur).

- Asymptote horizontale :$(y=1)\left(car(\lim_{x\to\infty}\quad\frac{x-2}{x-3}=1)\right)$.

d. Étude des variations :

- Dérivée : $(f'(x)=\frac{(-1)(x-3)-(x-2)(1)}{(x-3)^2}=\frac{-x+3-x+2}{(x-3)^2}=\frac{-2x+5}{(x-3)^2})$.

- Tableau de variations :

La fonction est croissante sur ($]-\infty,-2[\,\cup]3,+\infty[$) et décroissante sur ($]-2,3[$).

e. Représentation graphique :

La fonction présente une asymptote verticale en ($x\ =\ 3$) et une horizontale en ($y\ =\ 1$). Elle est croissante ou décroissante selon les intervalles décrits ci-dessus.