

Exercice 1 : Milieu d'un Segment

Trouvez le milieu (M) du segment $([AB])$ où $(A(1,3,5))$ et $(B(7,9,11))$.

Solution :

Le milieu (M) est donné par :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Calculons les coordonnées de (M) :

$$M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{3+9}{2}, \frac{5+11}{2}\right) = M(4,6,8)$$

Exercice 2 : Vecteur Normal à un Plan

Trouvez un vecteur normal au plan défini par les points $(A(0,0,0))$, $(B(1,2,3))$, et $(C(4,5,6))$.

Solution :

1. Trouvons les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, 3) - (0, 0, 0) = (1, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, 5, 6) - (0, 0, 0) = (4, 5, 6)$$

2. Calculons le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ pour obtenir le vecteur normal :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \hat{i}(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - \hat{j}(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + \hat{k}(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4)$$

$$= \hat{i}(12 - 15) - \hat{j}(6 - 12) + \hat{k}(5 - 8)$$

$$= -3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$$

Le vecteur normal est $((-3,6,-3))$.

Exercice 3 : Équation d'un Plan

Déterminez l'équation du plan passant par les points $(A(1,2,3))$, $(B(4,0,6))$, et $(C(7,8,5))$.

Solution :

1. Trouvons les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4 - 1, 0 - 2, 6 - 3) = (3, -$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7 - 1, 8 - 2, 5 - 3) = (6, 6$$

2. Calculons le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}((-2) \cdot 2 - 3 \cdot$$

$$= \hat{i}(-4 - 18) - \hat{j}(6 - 18) + \hat{k}(18 + 12)$$

$$= -22\hat{i} + 12\hat{j} + 30\hat{k}$$

Le vecteur normal est $(-22, 12, 30)$.

3. L'équation du plan est :

$$-22(x - 1) + 12(y - 2) + 30(z - 3) = 0$$

En simplifiant, nous obtenons :

$$-22x + 12y + 30z - 22 + 24 - 90 = 0 \Rightarrow -22x + 12y + 30z - 88 = 0$$

