Exercice 1 : Position relative de deux droites dans l'espace

Soient les droites (d_1) et (d_2)définies par les équations paramétriques suivantes :

- $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$
- $d_2 : \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = -1 + s \\ z = 5 + s \end{cases}$

Déterminer la position relative de ces deux droites (parallèles, sécantes, ou gauches).

Correction :

1. Vecteurs directeurs :

   Pour (d_1), le vecteur directeur est $(\vec{u} = (1, -1, 2))$.

   Pour (d_2), le vecteur directeur est $(\vec{v} = (2, 1, 1))$.

2. Vérification de la coplanarité :

   Calculons le produit vectoriel $(\vec{u} \times \vec{v})$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 3, 3)$$

Le produit mixte $((\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}))$ $avec$ $(\overrightarrow{AB} = (3-1, -1-2, 5-3) = (2, -3, 2))$ $est\ non\ nul$:

$$(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 2(-3) + (-3)(3) + 2(3) = -6 - 9 + 6 = -9 \neq 0$$

$Donc$, (d_1) et (d_2)ne sont pas coplanaires et sont des droites gauches.

Exercice 2 : Intersection d'une droite et d'un plan

Trouver le point d'intersection de la droite

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$avec\ le\ plan\ (P:\ x - y + 2z - 3 = 0).$$

Correction :

1. Paramétrisation de la droite :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

2. Substitution dans l'équation du plan :

Substituer $(x, y,)\ et\ (z)\ dans\ (x - y + 2z - 3 = 0)$:

$$(1 + 2t) - (-1 + t) + 2(3t) - 3 = 0 \Rightarrow 1 + 2t + 1 + t + 6t - 3 = 0$$

$$9t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{9}$$

3. Coordonnées du point d'intersection :

Pour $(t = \frac{1}{9})$:

$$x = 1 + 2 \times \frac{1}{9} = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$$

$$y = -1 + \frac{1}{9} = -\frac{8}{9}$$

$$z = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Donc, le point d'intersection est $(\left(\frac{11}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{1}{3}\right))$.

Exercice 3 : Équation d'un plan passant par trois points

Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par les points $(A(1,2,-1)), (B(3,0,2))\ et\ (C(0,-1,1))$.

Correction :

1. Vecteurs AB et AC :

$$\underset{\mathrm{AB}}{\rightarrow} = \big(3 - 1, 0 - 2, 2 - (-1)\big) = (2, -2, 3)$$

$$\underset{\mathrm{AC}}{\rightarrow} = \big(0 - 1, -1 - 2, 1 - (-1)\big) = (-1, -3, 2)$$

2. Calcul du vecteur normal au plan $(\vec{n} = \underset{\mathrm{AB}}{\rightarrow} \times \underset{\mathrm{AC}}{\rightarrow})$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = (4 + 9, -2 + 3, -6 + 2) = (13,1,-4)$$

3. Équation du plan :

Utiliser le point $(A(1,2,-1))$ pour trouver l'équation du plan :

$$13(x - 1) + 1(y - 2) - 4(z + 1) = 0$$

$$13x + y - 4z = 15$$

Donc, l'équation cartésienne du plan est :

13x + y - 4z = 15