Exercice 1 :

Trouver la projection orthogonale du point ($C(5,2)$) sur la droite d'équation ($3x - 4y + 6 = 0$).

Solution :

1. Identifions les coordonnées du point($C(x_C = 5, y_C = 2)$) et les coefficients de la droite ($a = 3, b = -4, c = 6$).

2. Appliquons la formule de projection orthogonale :

$$x' = \frac{-4(-4 \cdot 5 - 3 \cdot 2) - 3 \cdot 6}{3^2 + (-4)^2} = \frac{80 - 18 - 18}{25} = \frac{44}{25} = 1.76$$

$$y' = \frac{3(-4 \cdot 5 + 3 \cdot 2) - (-4) \cdot 6}{3^2 + (-4)^2} = \frac{-60 + 18 + 24}{25} = \frac{-18}{25} = -0.72$$

3. Les coordonnées de la projection de \(C\) sur la droite sont donc ($C'(1.76, -0.72)$).

Exercice 2 :

Trouver la projection orthogonale du point ($D(-2,4)$) sur la droite d'équation ($x + 2y - 3 = 0$).

Solution :

1. Identifions les coordonnées du point ($D(x_D = -2, y_D = 4)$) et les coefficients de la droite ($a = 1, b = 2, c = -3$).

2. Appliquons la formule de projection orthogonale :

$$x' = \frac{2(2 \cdot -2 - 1 \cdot 4) - 1 \cdot (-3)}{1^2 + 2^2} = \frac{-16 + 3}{5} = \frac{-13}{5} = -2.6$$

$$y' = \frac{1(-2 \cdot -2 + 1 \cdot 4) - 2 \cdot (-3)}{1^2 + 2^2} = \frac{8 + 6}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

3. Les coordonnées de la projection de (D) sur la droite sont donc ($D'(-2.6, 2.8)$).

Exercice 3 :

Soit le triangle (ABC) avec les points ($A(2,3)$), ($B(-1,5)$), et($C(4,-2)$). Trouver la projection orthogonale de chacun des sommets du triangle sur la droite (d) d'équation ($x - y + 1 = 0$). Puis, vérifier si les projections sont alignées.

Solution :

1. Projection du point($A(2,3)$) sur la droite ($d : x - y + 1 = 0$).

- Identifions les coefficients : ($a = 1, b = -1, c = 1$).

- Appliquons la formule :

$$x'_A = \frac{-1(-1 \cdot 2 - 1 \cdot 3) - 1 \cdot 1}{1^2 + (-1)^2} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

$$y'_A = \frac{1(-1\cdot 2 + 1\cdot 3) - (-1)\cdot 1}{1^2 + (-1)^2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

- Coordonnées de la projection de (A): $(A'(2{,}1))$.

2. Projection du point $(B(-1{,}5))$sur la droite (d).

- Appliquons la formule :

$$x'_B = \frac{-1(-1\cdot -1 - 1\cdot 5) - 1\cdot 1}{1^2 + (-1)^2} = \frac{-4-1}{2} = -2.5$$

$$y'_B = \frac{1(-1\cdot -1 + 1\cdot 5) - (-1)\cdot 1}{1^2 + (-1)^2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

- Coordonnées de la projection de (B): $(B'(-2.5{,}3.5))$.

3. Projection du point $(C(4,-2))$ sur la droite (d).

- Appliquons la formule :

$$x'_C = \frac{-1\big(-1\cdot 4 - 1\cdot(-2)\big) - 1\cdot 1}{1^2 + (-1)^2} = \frac{2-1}{2} = 0.5$$

$$y'_C = \frac{1\big(-1\cdot 4 + 1\cdot(-2)\big) - (-1)\cdot 1}{1^2 + (-1)^2} = \frac{-6+1}{2} = -2.5$$

- Coordonnées de la projection de (C): $(C'(0.5,-2.5))$.

4. Vérification de l'alignement des projections :

- Pour vérifier l'alignement des points $(A'), (B'), et (C')$, calculons le déterminant des vecteurs

$\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$:

$$\overrightarrow{A'B'} = (-2.5-2, 3.5-1) = (-4.5, 2.5)$$

$$\overrightarrow{A'C'} = (0.5-2, -2.5-1) = (-1.5, -3.5)$$

$$\text{Dét} = (-4.5)(-3.5) - (2.5)(-1.5) = 15.75 + 3.75 = 19.5 \neq 0$$