Exercice 1 : Utilisation des Formules de Somme et Différence

Simplifie l'expression $(\sin(60° + x) - \cos(30° - x))$.

Solution :

Utilisons les formules de somme et de différence pour simplifier l'expression :

$$\sin(60° + x) = \sin(60°)\cos(x) + \cos(60°)\sin(x)$$

$$\cos(30° - x) = \cos(30°)\cos(x) + \sin(30°)\sin(x)$$

Sachant que$(\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\cos(60°) = \frac{1}{2})$, $(\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2})$, $et(\sin(30°) = \frac{1}{2})$,on remplace dans les formules :

$$\sin(60° + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$$

$$\cos(30° - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$$

En substituant dans l'expression initiale :

$$\sin(60° + x) - \cos(30° - x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right)$$

$$= 0\text{L'expression}$$

L'expression se simplifie donc à 0.

Exercice 2 : Simplification d'une Expression Trigonométrique

Simplifie l'expression $(\frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)})$.

Solution :

Utilisons les identités trigonométriques pour simplifier l'expression :

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

L'expression devient :

$$\frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1 + (1 - 2\sin^2(x))}$$

$$= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2 - 2\sin^2(x)}$$

$$= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2(1 - \sin^2(x))}$$

$$= \frac{\sin(x)\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}$$

Comme $(1 - \sin^2(x) = \cos^2(x))$, l'expression devient :

$$\frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

Donc, $(\frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \tan(x))$.

Exercice 3 : Résolution d'une Équation Trigonométrique

Résous l'équation $(\cos(2x) = \cos(x))$.

Solution :

Utilisons les identités trigonométriques pour exprimer $(\cos(2x))$ en termes de $(\cos(x))$:

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

L'équation devient :

$$2\cos^2(x) - 1 = \cos(x)$$

Réarrangeons l'équation :

$$2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$$

C'est une équation quadratique en \(\cos(x)\). Soit \(y = \cos(x)\), l'équation devient :

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

Résolvons cette équation quadratique en utilisant la formule quadratique

$$(y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}), où\ (a = 2), (b = -1), et\ (c = -1):$$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Nous avons donc deux solutions pour (y) :

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = 1, \quad y_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$Ainsi, (\cos(x) = 1) ou (\cos(x) = -\frac{1}{2}).$$

$$-Pour\ (\cos(x) = 1), ona (x = 0 + 2k\pi), où (k \in Z).$$

$$-Pour\ (\cos(x) = -\frac{1}{2}), ona (x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi)\ ou\ (x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi), où (k \in Z).$$

$$Donc, les\ solutions\ de\ l'équation\ (\cos(2x) = \cos(x))\ sont\ (x = 0 + 2k\pi), (x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi), et (x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi).$$

Exercice 4 :

Résous l'équation suivante pour ($x \in [0,2\pi]$):

$$(\sin(x) + \sin(3x) = 0).$$

Solution :

Utilisons les formules d'addition pour réécrire $(\sin(3x))$ $en\ termes\ de$ $(\sin(x)) et (\cos(x))$.

La formule de triple angle pour le sinus est :

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Substituons cette formule dans l'équation :

$$\sin(x) + 3\sin(x) - 4\sin^3(x) = 04\sin(x) - 4\sin^3(x) = 0\text{Factorisons}$$
$$4\sin(x) - 4\sin^3(x) = 0\text{Factorisons}$$

Factorisons par $(\sin(x))$:

$$4\sin(x)\,(1 - \sin^2(x)) = 0\text{Cela}$$

Cela donne deux équations :

1. $(4\sin(x) = 0)$

2. $(1 - \sin^2(x) = 0)$

Résolvons chaque équation :

1.$Pour(4\sin(x) = 0)$:

$$\sin(x) = 0\text{Pour}$$

Pour $(x \in [0,2\pi])$,les solutions sont $(x = 0) et (x = \pi)$.

2. Pour $(1 - \sin^2(x) = 0)$:

$$\sin^2(x) = 1 \ \Rightarrow \sin(x) = \pm 1$$

Pour $(x \in [0,2\pi])$, les solutions sont $(x = \frac{\pi}{2})(pour(\sin(x) = 1)) et (x = \frac{3\pi}{2})(pour(\sin(x) = -1))$.

Donc, les solutions de l'équation $(\sin(x) + \sin(3x) = 0) pour (x \in [0,2\pi]) sont$:

$$x = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Ce sont toutes les solutions de l'équation sur l'intervalle donné.