

Exercice 1 :

Utilisation des Formules de Somme et Différence

Simplifie l'expression $(\sin(60^\circ + x) - \cos(30^\circ - x))$.

Solution :

Utilisons les formules de somme et de différence pour simplifier l'expression :

$$\sin(60^\circ + x) = \sin(60^\circ) \cos(x) + \cos(60^\circ) \sin(x)$$

$$\cos(30^\circ - x) = \cos(30^\circ) \cos(x) + \sin(30^\circ) \sin(x)$$

Sachant que $(\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\cos(60^\circ) = \frac{1}{2})$, $(\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2})$, et $(\sin(30^\circ) = \frac{1}{2})$, on remplace dans les formules :

$$\sin(60^\circ + x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x)$$

En substituant dans l'expression initiale :

$$\begin{aligned} \sin(60^\circ + x) - \cos(30^\circ - x) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \right) \\ &= 0 \text{ l'expression} \end{aligned}$$

L'expression se simplifie donc à 0.

Exercice 2 :

Simplification d'une Expression Trigonométrique

Simplifie l'expression $\left(\frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} \right)$.

Solution :

Utilisons les identités trigonométriques pour simplifier l'expression :

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$$

L'expression devient :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} &= \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{1 + (1 - 2 \sin^2(x))} \\ &= \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{2 - 2 \sin^2(x)} \\ &= \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{2(1 - \sin^2(x))} \\ &= \frac{\sin(x) \cos(x)}{1 - \sin^2(x)} \end{aligned}$$

Comme $(1 - \sin^2(x) = \cos^2(x))$, l'expression devient :

$$\frac{\sin(x) \cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

$$\text{Donc, } \left(\frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} = \tan(x) \right).$$

Exercice 3 :

Résolution d'une Équation Trigonométrique

Résous l'équation ($\cos(2x) = \cos(x)$).

Solution :

Utilisons les identités trigonométriques pour exprimer ($\cos(2x)$) en termes de ($\cos(x)$):

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

L'équation devient :

$$2 \cos^2(x) - 1 = \cos(x)$$

Réarrangeons l'équation :

$$2 \cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$$

C'est une équation quadratique en ($\cos(x)$). Soit ($y = \cos(x)$), l'équation devient :

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

Résolvons cette équation quadratique en utilisant la formule quadratique

$$\left(y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right), \text{ où } (a = 2), (b = -1), \text{ et } (c = -1):$$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Nous avons donc deux solutions pour (y) :

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = 1, \quad y_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi, } (\cos(x) = 1) \text{ ou } (\cos(x) = -\frac{1}{2}).$$

$$\text{--Pour } (\cos(x) = 1), \text{ on a } (x = 0 + 2k\pi), \text{ où } (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{--Pour } (\cos(x) = -\frac{1}{2}), \text{ on a } (x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi) \text{ ou } (x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi), \text{ où } (k \in \mathbb{Z}).$$

Donc, les solutions de l'équation ($\cos(2x) = \cos(x)$) sont ($x = 0 + 2k\pi$), ($x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$), et ($x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$).

Exercice 4 :

Résous l'équation suivante pour $(x \in [0, 2\pi])$:

$$(\sin(x) + \sin(3x) = 0).$$

Solution :

Utilisons les formules d'addition pour réécrire $(\sin(3x))$ *enter mes de* $(\sin(x))$ et $(\cos(x))$.

La formule de triple angle pour le sinus est :

$$\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$$

Substituons cette formule dans l'équation :

$$\sin(x) + 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x) = 0$$

$$4 \sin(x) - 4 \sin^3(x) = 0$$

Factorisons par $(\sin(x))$:

$$4 \sin(x) (1 - \sin^2(x)) = 0$$

Cela donne deux équations :

1. $(4 \sin(x) = 0)$

2. $(1 - \sin^2(x) = 0)$

Résolvons chaque équation :

1. Pour $(4 \sin(x) = 0)$:

$$\sin(x) = 0$$

Pour $(x \in [0, 2\pi])$, les solutions sont $(x = 0)$ et $(x = \pi)$.

2. Pour $(1 - \sin^2(x) = 0)$:

$$\sin^2(x) = 1 \Rightarrow \sin(x) = \pm 1$$

Pour $(x \in [0, 2\pi])$, les solutions sont $(x = \frac{\pi}{2})$ (pour $(\sin(x) = 1)$) et $(x = \frac{3\pi}{2})$ (pour $(\sin(x) = -1)$).

Donc, les solutions de l'équation $(\sin(x) + \sin(3x) = 0)$ pour $(x \in [0, 2\pi])$ sont :

$$x = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Ce sont toutes les solutions de l'équation sur l'intervalle donné.