Exercice 1 : Soustraction de polynômes

Soustraire le polynôme $Q(x) = 2x^3 - x + 4$ du polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$.
Correction :
$P(x) - Q(x) = (x^3 + x^2 - 3x + 1) - (2x^3 - x + 4)$
$= x^3 - 2x^3 + x^2 - 3x + x + 1 - 4$
$= -x^3 + x^2 - 2x - 3$

Exercice 2 : Division de polynômes

Diviser le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 2$ par $D(x) = x - 1$.
Correction :
On effectue la division polynomiale :
1. Diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur : ($2x^3 / x = 2x^2$).
2. Multiplier $D(x)$ par $2x^2$: $2x^2(x - 1) = 2x^3 - 2x^2$.
3. Soustraire de $P(x)$: $(2x^3 + 3x^2 - x - 2) - (2x^3 - 2x^2) = 5x^2 - x - 2$.
4. Répéter le processus jusqu'à obtenir un reste de degré inférieur à celui de $D(x)$.

Le quotient est $2x^2 + 5x + 4$ et le reste est 2.

Exercice 3 : Résolution d'une équation polynomiale complexe

Résoudre l'équation polynomiale : $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.
Correction :
1. Identifier le polynôme : $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.
   Ce polynôme est la forme développée de $(x - 1)^4$.
2. Factoriser le polynôme : $P(x) = (x - 1)^4$.
3. Trouver les racines : Pour que $P(x) = 0$, il faut que $(x - 1)^4 = 0$.
   Ainsi, la seule racine est $x = 1$, mais elle est de multiplicité 4.
4. Vérification de la solution : En substituant $x = 1$ dans $P(x)$, on obtient $P(1) = (1 - 1)^4 = 0$.
   Cela confirme que $x = 1$ est la racine correcte.