Généralités sur les Fonctions

1- Définition d'une Fonction

Une fonction est une relation qui associe à chaque élément d'un ensemble de départ (appelé domaine de définition) un unique élément d'un ensemble d'arrivée. Par exemple, si nous avons une fonction (f) qui associe à chaque nombre son double, alors pour $(x = 2), (f(x) = 4)$.

2- Notation des Fonctions

Une fonction (f) de l'ensemble (A) vers l'ensemble (B) est notée ($f : A \rightarrow B$). Pour chaque $(x \in A), (f(x))\ est\ l'image\ de\ (x)\ par\ (f)$.

- **Domaine de définition** : L'ensemble des valeurs de (x) pour lesquelles la fonction est définie.

- **Image** : L'ensemble des valeurs de $(f(x))$ obtenues lorsque (x) parcourt le domaine de définition.

3- Exemples de Fonctions

1. **Fonction constante** : Une fonction est constante si elle est de la forme $(f(x) = c), où\ (c)$ est une constante. Elle ne dépend pas de(x). $Par\ exemple, (f(x) = 5)$est une fonction constante.
2. **Fonction linéaire** : Une fonction linéaire est de la forme$(f(x) = ax + b), où\ (a)\ et\ (b)$ sont des constantes. Par exemple, $(f(x) = 2x + 3)$.

3. **Fonction quadratique** : Une fonction quadratique est de la forme $(f(x) = ax^2 + bx + c), où\ (a), (b), et\ (c)$ sont des constantes, et ($a \neq 0$). Par exemple, $(f(x) = x^2 - 4x + 3)$.

4. **Fonction polynomiale** : Une fonction polynomiale est de la forme $(f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0), où\ les\ (a_i)$ sont des constantes et (n) est un entier positif.

5. **Fonction rationnelle** : Une fonction rationnelle est le quotient de deux polynômes. Par exemple, $(f(x) = \frac{x^2+1}{x-3})$.

6. **Fonction racine carrée** : Une fonction racine carrée est de la forme $(f(x) = \sqrt{x})$.

4- Domaine de Définition

Le domaine de définition d'une fonction est l'ensemble des valeurs de (x) pour lesquelles la fonction est définie.

Exemples de Calcul du Domaine de Définition :

Exemple 1 :

Trouver le domaine de définition de la fonction $(f(x) = \frac{2x+3}{x-1})$.

Solution :

La fonction est définie pour toutes les valeurs de (x) sauf lorsque le dénominateur est nul. Ici, le dénominateur ($x - 1 = 0$) $lorsque$ ($x = 1$). Donc, le domaine de définition de

$$(f) \quad est \quad (R \setminus \{1\}).$$

Exemple 2 :

Trouver le domaine de définition de la fonction $(g(x) = \sqrt{x-2})$.

Solution :

La fonction est définie lorsque l'expression sous la racine est positive ou nulle. Donc, ($x - 2 \geq 0$), ce qui implique ($x \geq 2$). Ainsi, le domaine de définition de (g) est ($[2, +\infty[$).

5- Images et Antécédents

- **Image d'un élément** : Si$(f : A \rightarrow B) est\ une\ fonction\ et\ (x \in A), alors\ (f(x)) est\ l'image\ de\ (x)\ par\ (f)$.

- **Antécédent d'une image** : Si ($y \in B$) est une valeur pour laquelle il existe ($x \in A$) tel que $(f(x) = y)$, alors (x) est un antécédent de (y).

Exemples d'Images et Antécédents :

Exemple 1:

Soit ($f(x) = 3x + 1$).Trouver l'image de ($x = 2$) et déterminer l'antécédent de ($y = 7$).

Solution :

- Pour$(x = 2), (f(2) = 3 \times 2 + 1 = 7). Donc, l'image\ de\ 2\ est\ 7$.

- Pour ($y = 7$),$nous\ avons$ ($7 = 3x + 1$). En résolvant, on trouve ($x = 2$). Donc, l'antécédent de 7 est 2.

Exemple 2 :

Soit $(h(x) = x^2 - 4x + 4)$.Trouver l'image de ($x = 3$).

Solution :

Pour $(x = 3), (h(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 4 = 9 - 12 + 4 = 1)$.Donc, l'image de 3 est 1.

6- Représentation Graphique des Fonctions

La représentation graphique d'une fonction (f) est un ensemble de points dans un plan, chaque point ayant pour coordonnées ($(x, f(x))$).

Exemples de Représentation Graphique :

- Fonction linéaire : La représentation graphique d'une fonction linéaire ($f(x) = ax + b$) est une droite.

- Fonction quadratique : La représentation graphique d'une fonction quadratique ($f(x) = ax^2 + bx + c$\) est une parabole.