Géométrie dans l'Espace

1. Notions de Base

1.1 Points, Droites, et Plans

- **Point :** Représenté par une lettre majuscule $(ex: A, B, C)$. Il n’a pas de dimension.

- **Droite :** Représentée par deux points distincts (ex : AB) ou une lettre minuscule (ex : d). Elle est infinie dans les deux directions et possède une seule dimension.

- **Plan :** Représenté par une lettre grecque (ex : α, β). Un plan est infini en longueur et en largeur mais n'a pas d'épaisseur.

1.2 Vocabulaire et Notations

- **Points alignés :** Des points sont alignés s'ils appartiennent à une même droite.

- **Points coplanaires :** Des points sont coplanaires s'ils appartiennent à un même plan.

- **Droites coplanaires :** Deux droites sont coplanaires si elles sont contenues dans un même plan.

2. Positions Relatives de Deux Droites

2.1 Droites Coplanaires

Deux droites sont dites coplanaires si elles sont contenues dans un même plan. Les positions possibles pour deux droites coplanaires sont :

- **Parallèles :** Elles ne se croisent jamais (elles n'ont aucun point d'intersection).

- **Sécantes :** Elles se croisent en un unique point.

2.2 Droites Non Coplanaires (Droites Gauches)

Deux droites sont dites gauches si elles ne sont pas contenues dans un même plan. Elles ne se croisent jamais et ne sont pas parallèles.

3. Position Relative d'une Droite et d'un Plan

- **Droite Incluse dans un Plan** : Tous les points de la droite appartiennent au plan.

- **Droite Sécante à un Plan :** Elle croise le plan en un seul point.

- **Droite Parallèle à un Plan** : Elle ne croise jamais le plan et n'est pas incluse dans le plan.

4. Position Relative de Deux Plans

- Plans Parallèles : Ils ne se croisent jamais, quel que soit leur prolongement.

- Plans Sécants : Ils se croisent selon une droite. L'intersection de deux plans n'est pas un point mais une droite.

5. Représentation des Points et des Vecteurs dans l'Espace

5.1 Coordonnées dans l'Espace

Un point dans l'espace est défini par ses coordonnées ((x, y, z)).

5.2 Vecteurs dans l'Espace

Un vecteur dans l'espace est défini par ses composantes((a, b, c)), où :

- (a) : La différence des coordonnées (x) entre le point d'arrivée et le point de départ.

- (b) : La différence des coordonnées (y) entre le point d'arrivée et le point de départ.

- (c) : La différence des coordonnées (z) entre le point d'arrivée et le point de départ.

6. Produit Scalaire dans l'Espace

Le produit scalaire de deux vecteurs $(\vec{u} = (u_1, u_2, u_3))\ et\ (\vec{v} = (v_1, v_2, v_3))$ est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Le produit scalaire est utilisé pour déterminer l'angle entre deux vecteurs et pour vérifier si deux vecteurs sont orthogonaux.

7. Produit Vectoriel dans l'Espace

Le produit vectoriel de deux vecteurs $(\vec{u} = (u_1, u_2, u_3))\ et\ (\vec{v} = (v_1, v_2, v_3))\ est\ un\ vecteur$

$(\vec{w} = (w_1, w_2, w_3))$ défini par :

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} =$$

$$u2v3 \ - \ u3v2$$

$$u3v1 \ - \ u1v3$$

$$u1v2 \ - \ u2v1$$

Le produit vectoriel est utilisé pour déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs donnés.

8. Équation Cartésienne d'un Plan

Un plan dans l'espace peut être défini par une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où $(a, b,)\ et\ (c)$ sont les coefficients de direction du vecteur normal au plan, et (d) est le terme constant.

Exemple 1 :

Déterminer l'Intersection de Deux Droites

Soient les droites $(d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1})\ et\ (d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1})$. Déterminer leur position relative.

Correction :

1. Équation paramétrique de $(d_1) et (d_2)$:

$$-Pour\ (d_1): (x = 2t + 1), (y = -3t - 1), (z = t).$$

$$-Pour\ (d_2): (x = s + 2), (y = 2s), (z = -s + 1).$$

2. Équation vectorielle des droites :

$$-(d_1: \overrightarrow{OM} = (1, -1,0) + t(2, -3,1)).$$

$$-(d_2: \overrightarrow{ON} = (2,0,1) + s(1,2, -1)).$$

3. Vérification de la coplanarité :

- Calculer le produit vectoriel et le produit mixte :

$$\vec{u_2} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

$$\vec{u_1} \cdot (-1, 2, -1) = -2 + (-6) + (-1) = -9$$

- Puisque le produit mixte est non nul, les droites ne sont pas coplanaires. Ce sont donc des droites gauches.

Exemple 2 : Intersection d'une Droite et d'un Plan

Trouver le point d'intersection de la droite $(d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-1})$ avec le plan

$$(P : x + 2y - z + 1 = 0).$$

Correction :

1. Paramétrisation de la droite :

$$x = t + 2, \quad y = 2t - 3, \quad z = -t + 4$$

2. Substitution dans l'équation du plan :

$$(t + 2) + 2(2t - 3) - (-t + 4) + 1 = 0$$

$t + 2 + 4t - 6 + t - 4 + 1 = 0$

$$6t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{6}$$

3. Coordonnées du point d'intersection :

$x = \frac{19}{6}, \quad y = \frac{-2}{3}, \quad z = \frac{17}{6}$

$$Le\ point\ d'inter\ section\ est\ (\left(\frac{19}{6}, \frac{-2}{3}, \frac{17}{6}\right)).$$