

Introduction aux nombres réels

1. Définition des Nombres Réels

Les nombres réels représentent l'ensemble des nombres qui peuvent être trouvés sur la droite numérique. Cet ensemble inclut :

- **Les nombres rationnels (\mathbb{Q})** : nombres qui peuvent être écrits sous forme de fraction $\left(\frac{a}{b}\right)$, où (a) et (b) sont des entiers et $(b \neq 0)$.
- **Les nombres irrationnels** : nombres qui ne peuvent pas être exprimés sous forme de fraction. Par exemple, (π) et $(\sqrt{2})$.

2. Les sous-ensembles des nombres réels

- **Les nombres naturels (\mathbb{N})** : $(0, 1, 2, 3, \dots)$
- **Les nombres entiers (\mathbb{Z})** : $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$
- **Les nombres rationnels (\mathbb{Q})** : $\left(\frac{a}{b}\right)$, où $(a \in \mathbb{Z})$ et $(b \in \mathbb{N}^*)$.
- **Les nombres irrationnels** : $(\sqrt{2}, \pi, \dots)$

3. Représentation des Nombres Réels

Les nombres réels peuvent être représentés sur une droite graduée. Chaque point sur cette droite correspond à un nombre réel. Entre deux nombres rationnels, il existe toujours un autre nombre réel (irrationnel).

4. Les propriétés des nombres réels

Les nombres réels respectent les propriétés suivantes :

- **Commutativité** : $(a + b = b + a)$ et $(a \times b = b \times a)$
- **Associativité** : $((a + b) + c = a + (b + c))$ et $((a \times b) \times c = a \times (b \times c))$
- **Distributivité** : $(a \times (b + c) = a \times b + a \times c)$

5. Ordre dans (\mathbb{R})

Dans l'ensemble des réels, on peut comparer les nombres. Par exemple, si $(a < b)$, cela signifie que (a) est plus petit que (b) sur la droite numérique.

Exemple 1 : Représentation des nombres sur une droite numérique

Représentez les nombres $(\sqrt{2}, 3, \frac{1}{2}, \pi)$ sur une droite numérique.

Solution :

$$-(\sqrt{2} \approx 1,41)$$

$$-(\pi \approx 3,14)$$

$$-(\frac{1}{2} = 0,5)$$

$$-(3 = 3)$$

Les nombres sont positionnés de gauche à droite selon leur valeur sur la droite numérique.

Exemple 2 : Trouver l'ensemble du nombre réel

Classer les nombres suivants dans les ensembles (N, Z, Q, R) : $(-5, \frac{4}{3}, 7, \sqrt{2}, \pi)$.

Solution :

$$-(-5 \in Z \subset Q \subset R)$$

$$-(\frac{4}{3} \in Q \subset R)$$

$$-(7 \in N \subset Z \subset Q \subset R)$$

$$-(\sqrt{2} \in R)(\text{irrationnel})$$

$$-(\pi \in R)(\text{irrationnel})$$

Exemple 3 : Calculer la somme de deux nombres réels

Calculez $(\sqrt{2} + \pi)$.

Solution :

- Approximations : $(\sqrt{2} \approx 1,41)$ et $(\pi \approx 3,14)$.

- Donc, $(\sqrt{2} + \pi \approx 1,41 + 3,14 = 4,55)$.