La Projection dans le Plan

1. Définition

La projection d'un point sur une droite est l'image de ce point lorsqu'il est projeté perpendiculairement sur cette droite. Si on a un point (A) et une droite (d), la projection orthogonale de (A) sur (d) est le point (A')situé sur (d) tel que le segment (AA') soit perpendiculaire à (d).

2. Propriétés de la Projection Orthogonale

. Distance Minimale : La distance entre un point et sa projection sur une droite est la distance la plus courte entre ce point et la droite.

2. Orthogonalité : Le segment qui joint un point et sa projection est perpendiculaire à la droite sur laquelle le point est projeté.

3. Calcul de la Projection Orthogonale

Pour calculer la projection orthogonale d'un point $(A(x_A, y_A))$ sur une droite d'équation $(ax + by + c = 0)$, on utilise la formule suivante pour trouver les coordonnées du point $(A'(x', y'))$:

$$x' = \frac{b(bx_A - ay_A) - ac}{a^2 + b^2}, \quad y' = \frac{a(-bx_A + ay_A) - bc}{a^2 + b^2}$$

Exemple 1 :

Trouver la projection orthogonale du point $(A(3,4))$ sur la droite d'équation $(2x - 3y + 5 = 0)$.

Solution :

1. Identifions les coordonnées du point $(A(x_A = 3, y_A = 4))$ et les coefficients de la droite $(a = 2, b = -3, c = 5)$.

2. Appliquons la formule pour la projection orthogonale :

$$x' = \frac{-3(-3) - 2(4) - 2 \cdot 5}{2^2 + (-3)^2} = \frac{9 - 8 - 10}{13} = \frac{-9}{13}$$

$$y' = \frac{2(-3 \cdot 3 + 2 \cdot 4) - (-3) \cdot 5}{2^2 + (-3)^2} = \frac{2(-9 + 8) + 15}{13} = \frac{-2 + 15}{13} = \frac{13}{13} = 1$$

3. Donc, les coordonnées de la projection de (A) sur la droite sont $\left(A'\left(-\frac{9}{13}, 1\right)\right)$.

Exemple 2 :

: Trouver la projection orthogonale du point ($B(0,-1)$) sur la droite d'équation ($x + y - 1 = 0$).

Solution :

1. Identifions les coordonnées du point($B(x_B = 0, y_B = -1)$)et les coefficients de la droite ($a = 1, b = 1, c = -1$).

2. Appliquons la formule pour la projection orthogonale :

$$x' = \frac{1\big(1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)\big) - (-1)}{1^2 + 1^2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

$$y' = \frac{1\big(-1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)\big) - 1}{1^2 + 1^2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

3. Les coordonnées de la projection de (B) sur la droite sont ($B'\left(0, -\frac{1}{2}\right)$).