La symétrie axiale

Définition :

La symétrie axiale est une transformation géométrique qui permet de « réfléchir » une figure par rapport à une droite appelée axe de symétrie. Si un point (A) est transformé en un point (A') par symétrie axiale, alors :

1. La droite perpendiculaire à l'axe de symétrie passant par $(A)\ et\ (A')$ coupe cet axe en son milieu.

2. La distance entre (A) et l'axe de symétrie est la même que celle entre (A') et l'axe.

Propriétés :

- L'image d'un point situé sur l'axe de symétrie reste lui-même (il est invariant).

- Si deux points sont symétriques par rapport à un axe, alors leurs images sont également symétriques par rapport à cet axe.

- La symétrie axiale conserve les distances et les angles, c'est donc une isométrie.

Exemple :

Soit une droite $((d))$ comme axe de symétrie et un point $(A(2,4))$. Pour trouver le symétrique $(A'(x',y'))\ de\ (A)$ par rapport à $((d))$, il faut :

1. Tracer une perpendiculaire de (A) à $l'axe\ ((d))$.

2. Calculer la distance entre $(A)\ et\ l'axe\ ((d))$.

3. Reporter cette distance de l'autre côté de l'axe pour obtenir(A').

Symétrie d'une droite :

Si une droite est transformée par symétrie axiale, l'image de cette droite sera une autre droite parallèle si elle n'est pas perpendiculaire à l'axe de symétrie, ou bien elle se superposera si elle est perpendiculaire.

Exercices corrigés

Exercice 1 : Symétrie d'un point par rapport à un axe

Soit un point ($B(3,5)$) et l'axe de symétrie ($y = 0$) (l'axe des abscisses). Trouve l'image de (B) par symétrie axiale.

Solution :

L'axe des abscisses est ($y = 0$), donc on réfléchit($B(3,5)$)par rapport à cet axe. La coordonnée (y) change de signe, tandis que la coordonnée (x) reste la même.

$$B'(3,-5)$$

Exercice 2 : Symétrie d'un segment

Soit le segment ($[CD]$) avec ($C(1,2)$)et($D(4,3)$). Trouve le symétrique de ce segment par rapport à l'axe ($x = 0$) (l'axe des ordonnées).

Solution :

Le symétrique d'un point par rapport à l'axe des ordonnées change la coordonnée \(x \) en son opposé. Donc :

- ($C(1,2)$) $devient$ ($C'(-1,2)$)

-($D(4,3)$) $devient$ ($D'(-4,3)$)

Le symétrique du segment ($[CD]$) est donc le segment ($[C'D']$) $avec$ ($C'(-1,2)$) et ($D'(-4,3)$).

Exercice 3 :

Soit un triangle (ABC) $avec$ ($A(2,1)$), ($B(4,3)$), et ($C(1,5)$). Trouve le symétrique de ce triangle par rapport à l'axe ($y = 2$).

Solution :

1. Pour chaque point, on réfléchit par rapport à ($y = 2$) :

 - Pour ($A(2,1)$), la distance entre (A) $et\ l'axe$ ($y = 2$) est ($|1-2| = 1$). Le symétrique de (A) sera à une distance égale de l'autre côté, donc ($A'(2,3)$).

 - Pour ($B(4,3)$), la distance entre (B) et ($y = 2$) est ($|3 - 2| = 1$). Le symétrique est ($B'(4,1)$).

 - Pour ($C(1,5)$), la distance est ($|5-2| = 3$), $donc$ ($C'(1,-1)$).

2. Le symétrique du triangle (ABC) est ($A'(2,3), B'(4,1), C'(1,-1)$).