# Le Produit Scalaire

Le produit scalaire est une opération algébrique qui prend deux vecteurs dans un espace vectoriel et renvoie un scalaire. Il est souvent utilisé en géométrie pour déterminer l'angle entre deux vecteurs ou pour projeter un vecteur sur un autre.

## 1- Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $(\vec{u} = (x_1, y_1)) et (\vec{v} = (x_2, y_2))$ dans le plan est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

## 2- Propriétés

1. **Commutativité** : $(\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u})$
2. **Linéarité** : $(\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w})$
3. **Distributivité** : $((\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w})$
4. **Produit scalaire d'un vecteur par lui-même** : $(\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2)$, où $(|\vec{u}|)$ $est\ la\ norme\ de\ (\vec{u})$.

## 3- Calcul de l'angle entre deux vecteurs

L'angle $(\theta)$ entre deux vecteurs $(\vec{u})$ $et$ $(\vec{v})$ peut être calculé à partir du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\theta)$$

**Exemple 1 :**

Calcul du produit scalaire

Soient $(\vec{u} = (3, -2)) et (\vec{v} = (1,4)). Calculer\ (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

**Solution :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3 \times 1) + (-2 \times 4) = 3 - 8 = -5$$

$$Donc, (\vec{u} \cdot \vec{v} = -5).$$

**Exemple 2 :**

Déterminer l'angle entre deux vecteurs

Soient $(\vec{u} = (2,3))\ et\ (\vec{v} = (1,0)). Déterminer\ l'angle\ entre\ (\vec{u})\ et\ (\vec{v})$.

**Solution :**

1. Calculons le produit scalaire : ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + 3 \times 0 = 2$).

2. Calculons les normes :

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

3. Utilisons la formule pour ($\cos(\theta)$):

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

4. Enfin, ($\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$).