L'Ordre dans (R)

1. Introduction :

L'ensemble des nombres réels (R) est doté d'une relation d'ordre naturel qui permet de comparer les éléments de cet ensemble. Cette relation d'ordre est notée par les symboles $(<)$ $(inférieur), (>)$ $(supérieur), (\leq)$ $(inférieur\ ou\ égal), et (\geq)$ $(supérieur\ ou\ égal)$.

2. Propriétés de l'Ordre :

Voici quelques propriétés fondamentales de l'ordre dans (R):

- Transitivité : Si $(a < b)\ et\ (b < c), alors\ (a < c)$.

- Réflexivité : Pour tout $(a \in R), (a \leq a)$.

- Antisymétrie : Si $(a \leq b)\ et\ (b \leq a), alors\ (a = b)$.

- Compatibilité avec l'addition : Si $(a < b), alors\ (a + c < b + c)\ pour\ tout\ (c \in R)$.

- Compatibilité avec la multiplication par un nombre positif : Si $(a < b)\ et\ (c > 0), alors\ (ac < bc)$.

- Compatibilité avec la multiplication par un nombre négatif : Si $(a < b)\ et\ (c < 0), alors\ (ac > bc)$.

3. Intervalles :

Un intervalle en mathématiques est un ensemble de nombres réels situés entre deux bornes, qui peuvent être incluses ou non. Voici les types d'intervalles :

- **Intervalle ouvert** : $((a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\})$

- **Intervalle fermé :** $([a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\})$

- **Intervalle semi-ouvert** : $((a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\})\ ou\ ([a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\})$

Exemple 1 :

Comparaison de nombres réels

Soit $(a = 5)\ et\ (b = -3). Comparer\ (a)\ et\ (b)$.

Solution :

Puisque $(a = 5 > -3 = b), on\ a\ (a > b)$.

Exemple 2 :

Utilisation des propriétés de l'ordre

Montrer que si $(x < y), alors\ (-y < -x)$.

Solution :

Par la compatibilité de l'ordre avec la multiplication par un nombre négatif, en multipliant les deux membres de $(x < y)$ par (-1), on obtient $(-x > -y)$. Donc, $(-y < -x)$.

Exemple 3 :

Détermination de la nature d'un intervalle

Soit l'ensemble $(E = \{x \in R \mid 2 < x \leq 7\})$. Quel est le type d'intervalle de (E) ?

Solution :

L'intervalle (E) est un intervalle semi-ouvert à gauche, c'est-à-dire $((2,7])$.