Ordre et opérations

1. Ordre et Opérations dans (R)

Les nombres réels ($\mathbb{R}$) sont ordonnés. Cela signifie que, pour tout couple de nombres réels a et b, une des relations suivantes est vraie :

- $a < b$ (a est strictement inférieur à b),
- $a = b$ (a est égal à b),
- $a > b$ (a est strictement supérieur à b).

1.1. Comparaison des nombres

On compare deux nombres réels en utilisant les relations d'ordre $<$, $>$, $\leq$, et $\geq$.

Exemples :

- $3 < 5$, car 3 est plus petit que 5.
- $-2 > -4$, car -2 est plus grand que -4.
- $0 \leq 1$, car 0 est inférieur ou égal à 1.

1.2. Propriétés de l'ordre

1. Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$ (transitivité de l'ordre).

2. Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ pour tout c (invariance par addition).

3. Si $a < b$ et $c > 0$, alors $a \cdot c < b \cdot c$ (multiplication par un nombre positif).

4. Si $a < b$ et $c < 0$, alors $a \cdot c > b \cdot c$ (multiplication par un nombre négatif).

2. Opérations et Ordre

Les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division suivent certaines règles lorsqu'on les applique à des nombres réels.

2.1. Addition et soustraction

- **Si** $(a < b), alors\ (a + c < b + c)\ pour\ tout\ (c).$

- **Si** $(a < b), alors\ (a - c < b - c)\ pour\ tout\ (c)$.

Exemple :

$$-(5 < 7), donc\ (5 + 3 < 7 + 3)\ soit\ (8 < 10).$$

2.2. Multiplication et division

- **Si** $(a < b)\ et\ (c > 0), alors\ (a \cdot c < b \cdot c)$.

- **Si** $(a < b)\ et\ (c < 0), alors\ (a \cdot c > b \cdot c)$.

-**Si**, $(a < b) et (c > 0), alors, (\frac{a}{c} < \frac{b}{c})$.

-**Si**, $(a < b) et (c < 0), alors, (\frac{a}{c} > \frac{b}{c})$.

Exemple :

- $(2 < 4), donc\ (2 \cdot 3 < 4 \cdot 3)\ soit\ (6 < 12)$.

-$(-2 < 1) et (-3 < 0), donc (-2 \cdot (-3) > 1 \cdot (-3)), soit (6 \succ 3)$.

3. Exemples corrigés

Exemple 1 :

Comparer les nombres suivants : $(-3), (2), et\ (0)$.

- On sait que $(-3 < 0 < 2)$. Donc, la relation d'ordre entre ces trois nombres est :

$$-3 < 0 < 2$$

Exemple 2 :

Vérifier si l'ordre est conservé pour la multiplication : Comparer $(a = -2)\ et\ (b = 1)$ en multipliant par $(c = -3)$.

- On a $(-2 < 1)$.

- Comme $(c = -3)$ est négatif, on doit inverser l'ordre en multipliant par (c).

$$-2 \cdot (-3) > 1 \cdot (-3)$$

$$6 > -3$$

L'ordre est bien inversé.

Exemple 3 :

Comparer les fractions suivantes : $(\frac{1}{2})\ et\ (\frac{3}{4})$.

- Pour comparer $(\frac{1}{2})\ et\ (\frac{3}{4})$, il faut les mettre sur un dénominateur commun :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$Donc\ (\frac{1}{2} < \frac{3}{4}).$$