Transformations du Plan

Les transformations du plan sont des opérations qui déplacent ou modifient les figures dans un plan géométrique sans en altérer la forme intrinsèque. Elles sont essentielles en géométrie et en mathématiques pour comprendre les symétries, les mouvements, et les déformations. Voici les principales transformations étudiées au niveau du tronc commun du système marocain :

1. Translation

2. Rotation

3. Symétrie axiale

4. Symétrie centrale

5. Homothétie

1. Translation

La translation est un déplacement uniforme de tous les points d'une figure dans une direction donnée et selon une distance fixe, déterminée par un vecteur $\underset{\mathbf{v}}{\rightarrow}$

- **Définition :** La translation de vecteur $\underset{\mathbf{v}}{\rightarrow}$ appliquée à un point $(A(x, y))$ donne un nouveau point $(A'(x', y'))$ tel que :

$$A' = (x + a, y + b)$$

Où $\underset{\mathbf{v}}{\rightarrow}$ = (a, b)).

- Propriétés :

- Les segments restent parallèles et conservent leur longueur.

- Les angles restent inchangés.

Exemple :

Si $(A(1,2))$ est translaté par le vecteur $\underset{\mathbf{v}}{\rightarrow}$= $(3,4)$), alors $(A'(4,6))$.

2. Rotation

La rotation est une transformation qui fait tourner une figure autour d'un point fixe, appelé centre de rotation, d'un angle donné (θ).

- **Définition** : La rotation d'un point $(A(x, y))$ autour du point $(O(0,0)) d'un\ angle\ (\theta)$ donne un point $(A'(x', y'))$tel que :

$$x' = x \cos\theta - y \sin\theta\,,$$

$$y' = x \sin\theta + y \cos\theta\,.$$

- **Propriétés :**

- La distance entre les points et le centre de rotation reste inchangée.

- Les angles internes de la figure sont préservés.

Exemple : Une rotation de $(90°)\ de\ (B(2,3))\ autour\ de\ (O(0,0))\ donne\ (B'(-3,2))$.

3. Symétrie Axiale

La symétrie axiale est une transformation qui reflète une figure par rapport à une droite appelée axe de symétrie.

- **Définition** : Si l'axe de symétrie est $(d)(par\ exemple, l'axe\ (y)), alors\ pour\ un\ point\ (A(x, y)), son\ image\ (A'(x', y'))\ est\ telleque$

$$(x' = -x)\ et\ (y' = y).$$

- **Propriétés :**

- Les figures sont reflétées symétriquement par rapport à l'axe.

- Les distances perpendiculaires à l'axe sont préservées.

Exemple :

La symétrie axiale de $(C(4,5))\ \ par\ rapport$ à $l'axe\ (y)\ donne\ (C'(-4,5))$.

4. Symétrie Centrale

La symétrie centrale est une transformation qui envoie chaque point$(A(x, y))$ sur un point $(A'(x', y'))$ tel que le point central (O) est le milieu du segment $([AA'])$.

- **Définition :** Si le centre de symétrie est $(O(0,0))$, alors :

$$A'(x', y') = (-x, -y)$$

- **Propriétés :**

- Les points sont renversés à travers le centre de symétrie.

- Les distances par rapport au centre sont conservées.

Exemple :

La symétrie centrale de $(D(2, -3))$ par rapport à $(O(0,0))\ donne\ (D'(-2,3))$.

5. Homothétie

L'homothétie est une transformation qui agrandit ou réduit une figure par rapport à un centre (O) et un rapport (k).

- **Définition** : Pour un point ($A(x, y)$) et un centre d'homothétie ($O(0,0)$):

$$A'(x', y') = (kx, ky)$$

- Propriétés :

- Les segments sont agrandis ou réduits en fonction du rapport (k).

- Les angles restent inchangés.

Exemple :

Une homothétie de rapport ($k = 2$)$de(E(1,2))$ $donne$ ($E'(2,4)$).

Exercice 1 :

Trouver l'image de ($F(-3,1)$) par une translation de vecteur$\underset{\mathrm{u}}{\rightarrow} = (-2,5)$.

Solution :

F' = (-5, 6)

Exercice 2 :

Trouver l'image de ($G(3,4)$) par une rotation de ($180°$) autour de l'origine.

Solution :

G' = (-3, -4)

Exercice 3 :

Trouver l'image de ($H(-2, -3)$) par une homothétie de centre ($O(0,0)$) et de rapport ($k = \frac{1}{2}$).

Solution :

H' = (-1, -1.5)