

Triangle rectangle et cercle

1. Définition d'un triangle rectangle

Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit, c'est-à-dire un angle de (90°) .

Dans un triangle rectangle, les éléments suivants sont définis :

- **L'hypoténuse** : le côté opposé à l'angle droit, qui est le plus long côté du triangle.
- **Les deux côtés adjacents (appelés côtés de l'angle droit ou cathètes)** : les deux autres côtés du triangle qui forment l'angle droit.

2. Propriétés du triangle rectangle

- **Théorème de Pythagore** : Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Soit un triangle rectangle de côtés (a) , (b) et d'hypoténuse (c) , on a :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- **Cercle circonscrit au triangle rectangle** : Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est situé au milieu de l'hypoténuse, et le rayon de ce cercle est la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

3. Relations dans le triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, il existe plusieurs relations importantes entre les angles et les côtés :

- Les sinus, cosinus et tangente d'un angle aigu dans le triangle rectangle sont définis comme suit :

$$\sin(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

4. Exemples corrigés

Exemple 1 : Application du théorème de Pythagore

Soit un triangle rectangle (ABC) avec $(AB = 6)$ cm, $(AC = 8)$ cm, et l'hypoténuse (BC) . Calculer la longueur de l'hypoténuse.

Solution :

D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$BC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

Résultat : L'hypoténuse (BC) mesure (10) cm.

Exemple 2 : Cercle circonscrit à un triangle rectangle

Dans le triangle rectangle (ABC) précédent, calculer le rayon du cercle circonscrit.

Solution :

Le rayon du cercle circonscrit à un triangle rectangle est la moitié de l'hypoténuse. Ici,

($BC = 10$) cm, donc :

$$\text{Rayon} = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Résultat : Le rayon du cercle est de (5) cm.

Exemple 3 : Utilisation des sinus et cosinus

Dans un triangle rectangle (ABC), on connaît ($AB = 5$) cm, ($AC = 12$) cm, et l'angle ($\hat{A} = 90^\circ$). Calculer le sinus et le cosinus de l'angle (\hat{B}).

Solution :

Pour calculer le sinus et le cosinus, nous devons d'abord déterminer la longueur de l'hypoténuse (BC) en appliquant le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

$$BC = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

Maintenant, calculons :

$$\sin(\hat{B}) = \frac{\text{côté opposé à } \hat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$$

Résultat :

$$\sin(\hat{B}) = \frac{12}{13}, \quad \cos(\hat{B}) = \frac{5}{13}$$