Triangles et droites parallèles

1. Théorème de Thalès

Le théorème de Thalès est un outil important dans l'étude des triangles et des droites parallèles.

Si deux droites parallèles coupent deux autres droites sécantes, alors les rapports des segments correspondants sont égaux.

Formulation mathématique :

Dans un triangle (ABC), si une droite parallèle à un côté (BC) coupe les deux autres côtés (AB) et $(AC)\ en\ (M)\ et\ (N)$, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

2. Réciproque du théorème de Thalès

Si, dans un triangle, une droite coupe deux côtés et que les rapports des longueurs de ces côtés sont égaux, alors cette droite est parallèle au troisième côté.

3. Cas particulier : Milieu d'un côté

Si une droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

4. Application des droites parallèles dans un triangle

Dans un triangle, une droite parallèle à un des côtés partage les autres côtés en segments proportionnels, permettant de calculer des longueurs inconnues en utilisant des rapports de proportionnalité.

Exercice 1 : Application simple du théorème de Thalès

Dans le triangle (ABC), une droite parallèle à (BC) coupe les côtés $(AB)\ et\ (AC)\ en\ (M)$ et (N). On a :

$$-\ (AB\ =\ 10\ \ cm)$$

$$-\ (AM\ =\ 4\ \ cm)$$

$$-(AC = 15 \ \ cm)$$

$$-Trouve\ (AN).$$

Solution :

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

On remplace les valeurs :

$$\frac{4}{10} = \frac{AN}{15}$$

D'où :

$$AN = \frac{4 \times 15}{10} = 6\,cm$$

Exercice 2 : Utilisation de la réciproque du théorème de Thalès

Soit un triangle (ABC) $avec$ $(AB = 8 \ \ cm)$, $(AC = 10 \ \ cm)$, et une droite coupe les côtés (AB) et (AC) en (M) et (N) respectivement. On sait que $(AM = 4 \ \ cm)$ et

$(AN = 5 \ \ cm)$. Montre que la droite (MN) est parallèle à (BC).

Solution :

D'après la réciproque du théorème de Thalès, si :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Alors $(MN \parallel BC)$. Calculons les rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{8} = 0.5, \quad \frac{AN}{AC} = \frac{5}{10} = 0.5$$

Les rapports sont égaux, donc $(MN \parallel BC)$.

Exercice 3 : Calcul de longueurs avec plusieurs droites parallèles

Dans le triangle (ABC), $on\ a$ $(AB = 9 \ \ cm)$, $(AC = 12 \ \ cm)$, et deux droites parallèles à (BC) coupent les côtés (AB) et (AC) en (M), (N), et (P), (Q) respectivement. On sait que $(AM = 3 \ \ cm)$, $(AN = 4 \ \ cm)$, et $(MP \parallel NQ \parallel BC)$.

1. Trouve (MP), (NQ), et la longueur de (BC).

2. Démontrer que les rapports des segments découpés par les droites parallèles sont égaux.

Solution :

1. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MP}{BC}, \quad \frac{AN}{AC} = \frac{NQ}{BC}$$

On remplace les valeurs données :

$$\frac{3}{9} = \frac{MP}{BC}, \quad \frac{4}{12} = \frac{NQ}{BC}$$

$$Cela\ donne\ (MP = \frac{BC}{3})\ et\ (NQ = \frac{BC}{3}).\ Ainsi, (BC = 9\ cm).$$

2. Les rapports des segments découpés sont égaux, ce qui prouve que les droites (MP), (NQ), et (BC) sont parallèles.